集　锦

1998年高中联赛加试题(1)的简证

江苏省盐城市城区永丰中学　费振鹏(224054)

题目　如图1,O,I分别为$\triangle ABC$的外心和内心,AD是BC边上的高,I在线段OD上,求证:$\triangle ABC$的外接圆半径等于BC边上的旁切圆半径.

注:$\triangle ABC$的BC边上的旁切圆是与边AB,AC的延长线以及边BC都相切的圆.

命题组给出的参考答案是利用三角法予以证明的,下面给出纯几何的简捷证法.

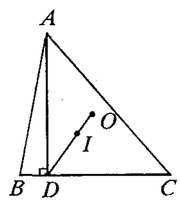

图1

证明　如图2,连结并延长AI,交$\triangle ABC$的外接圆于K,连结OK,CK,则$OK\perp BC$,$OK/\!/AD$且$IK=CK$($\because \angle KIC=\angle KCI$).

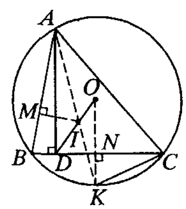

图2

记$\triangle ABC$的三边分别为a,b,c,半周长为s,外接圆半径为R,BC边上的旁切圆半径为r_a.

设$IM\perp AB$于M,OK交BC于N,则$\triangle AMI\backsim\triangle CNK$,从而$\frac{AD}{R}=\frac{AD}{OK}=\frac{AI}{IK}=\frac{AI}{CK}=\frac{AM}{CN}=\frac{2(s-a)}{a}$.于是$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AD=\frac{a}{2}\cdot\frac{2(s-a)R}{a}=(s-a)R$,又$\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}(b+c-a)r_a=(s-a)r_a$,

$\therefore R=r_a$.证毕.

一道代数名题的新证

安徽省五河一中　张同语(233300)

题目　已知$\frac{\sin^4\alpha}{\sin^2\beta}+\frac{\cos^4\alpha}{\cos^2\beta}=1$,求证:$\frac{\sin^4\beta}{\sin^2\alpha}+\frac{\cos^4\beta}{\cos^2\alpha}=1$.

这是一道代数名题,证法颇多,本文再给出一种新颖的证法.

证明　构造单位圆:$x^2+y^2=1$,由条件知点$A(\frac{\cos^2\alpha}{\cos\beta},\frac{\sin^2\alpha}{\sin\beta})$在单位圆上,故过点$A$的圆的切线方程为:$x\frac{\cos^2\alpha}{\cos\beta}+y\frac{\sin^2\alpha}{\sin\beta}=1$,又圆上一点$B(\cos\beta,\sin\beta)$也满足该切线方程,故$B$也是切点,根据圆上切点的唯一性,知$A$,$B$两点重合,$\therefore\frac{\cos^2\alpha}{\cos\beta}=\cos\alpha$,$\frac{\sin^2\alpha}{\sin\beta}=\sin\beta$

即:$\cos^2\alpha=\cos^2\beta$,$\sin^2\alpha=\sin^2\beta$,$\therefore\frac{\sin^4\beta}{\sin^2\alpha}+\frac{\cos^4\beta}{\cos^2\alpha}=\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$.

三角形中线与角平分线的一个不等式

江苏吴县市外贸公司　褚小光(215128)

刘健先生在给笔者信中,提及了一个三角形不等式猜想.即:

$$\Sigma w_a^2>\frac{4}{5}\Sigma m_bm_c,\qquad(1)$$

其中w_a,w_b,w_c,m_a,m_b,m_c表示$\triangle ABC$的角平分线和中线.

经笔者研究,发现不等式(1)成立,且系数$\frac{4}{5}$是最佳的,为了便于证明不等式(1),将