2003 年加拿大数学奥林匹克试题及参考解答

费振鹏 (江苏省盐城市城区永丰中学 224054)

1. 一个时针与分针连续转动的 12 小时标准时钟. 设 m 是整数, 且 $1 \leq m \leq 720$. 恰好在 12:00 后的 m 分钟, 时针与分针的夹角恰好是 $1°$. 求所有可能的 m 的值.

解 分针每小时 (60 分钟) 转动一周 $360°$, 则 m 分钟转动了 $\frac{360}{60}m°$, 即 $6m°$; 时针每 12 小时 (720 分钟) 转动一周 $360°$, 则 m 分钟转动了 $\frac{360}{720}m°$, 即 $\frac{1}{2}m°$. 由题意, 得 $6m - \frac{1}{2}m = \pm 1 + 360k$, 其中 k 是某些整数. 则 $m = \frac{720k \pm 2}{11} = 65k + \frac{5k \pm 2}{11}$.

因为 $1 \leq m \leq 720$, 所以 $9 \leq 720k \leq 7\,922$, 从而 $1 \leq k \leq 11$. 而 m 是整数, 故 $5k \pm 2$ 必须能被 11 整除.

设 $5k \pm 2 = 11q$, 其中 q 是整数, 则 $5k = 11q \pm 2$, 于是 $k = 2q + \frac{q \pm 2}{5}$.

因为 $1 \leq k \leq 11$, 所以 $3 \leq 11q \leq 57$, 从而 $1 \leq q \leq 5$. 又 q 是整数, $q \pm 2$ 能被 5 整除, 故 $q = 2$ 或 $q = 3$. 于是 $k = 4$ 或 $k = 7$. 从而 $m = 262$ 或 $m = 458$.

因此所有满足题意的可能的 m 的值是 262 与 458.

2. 求数 $2\,003^{2\,002^{2\,001}}$ 的末三位数字.

解 因为 $2\,003 \equiv 3 \pmod{1\,000}$, 所以 $2\,003^{2\,002^{2\,001}} \equiv 3^{2\,002^{2\,001}} \pmod{1\,000}$.

为解决这个问题, 我们首先确定一个正整数 n 使 $3^n \equiv 1 \pmod{1\,000}$.

由二项式定理, 得 $3^{2m} = (10 - 1)^m = (-1)^m + m \cdot 10 \cdot (-1)^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2} \cdot 10^2 \cdot (-1)^{m-2} + \cdots + 10^m$.

上式中前三项后的各项之和能被 1 000 整除. 于是设 $m = 2q$, 则 $3^{4q} \equiv 1 - 20q + 100q \cdot (2q - 1) \pmod{1\,000}$. ①

由 $1 - 20q + 100q(2q - 1) = 1\,000k + 1$, $5q^2 - 3q - 25k = 0$, 由十字相乘法可得 $q = 25$ 满足. 从而 $3^{100} \equiv 1 \pmod{1\,000}$.

而 $2\,002 \equiv 2 \pmod{100}$, 故 $2\,002^{2\,001} \equiv 2^{2\,001} \equiv 2^2 \cdot 2^{1\,999} \pmod{4 \cdot 25}$.

因为 $2^{10} = 1\,024 \equiv -1 \pmod{25}$, 所以 $2^{1\,999} = (2^{10})^{199} \cdot 2^9 \equiv (-1)^{199} \cdot 512 \equiv -12 \equiv 13 \pmod{25}$.

于是 $2\,002^{2\,001} \equiv 2^{2\,001} \equiv 4 \cdot 13 = 52 \pmod{100}$, 再由 ①, 得 $2\,003^{2\,002^{2\,001}} \equiv 3^{2\,002^{2\,001}} \equiv 3^{100k+52} \equiv 3^{52} \equiv 1 - 20 \cdot 13 + 1\,300 \cdot 25 \equiv 241 \pmod{1\,000}$.

因此数 $2\,003^{2\,002^{2\,001}}$ 的末三位数字是 241.

3. 求方程组 $\begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 = x + y + z, \\ x^2 + y^2 + z^2 = xyz \end{cases}$ 的所有 (如果有) 正实数解.

解法 1 设 $f(x, y, z) = (x^3 - x) + (y^3 - y) + (z^3 - z)$. 题中的第一个方程等价于 $f(x, y, z) = 0$. 若 $x, y, z \geq 1$, 则 $f(x, y, z) \geq 0$ 且仅当 $x = y = z = 1$ 时等号成立. 但若 $x = y = z = 1$, 则不满足第二个方程. 所以在方程组的任意解 (如果有) 中, 至少有一个未知数小于 1. 不失一般性, 假设 $x < 1$, 则 $x^2 + y^2 + z^2 > y^2 + z^2 \geq 2yz > xyz$. 因此原方程组没有正实数解.

解法 2 我们证明原方程组没有正实数解. 假设反面成立. 将第二个方程写成 $x^2 - (yz)x + (y^2 + z^2) = 0$. 因为关于 x 的二次方程有一个实数解的前提是它的判别式是非负数. 于是 $y^2z^2 - 4y^2 - 4z^2 \geq 0$, $y^2z^2 \geq 4y^2 + 4z^2$. 除以 $4y^2z^2$, 得 $\frac{1}{4} \geq \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \geq \frac{1}{y^2}$, 于是 $y^2 \geq 4$. 由于 y 是正数, 故 $y \geq 2$. 同理得 $x, y, z \geq 2$.

但第一个方程可写成 $x(x^2 - 1) + y(y^2 - 1) + z(z^2 - 1) = 0$, 结合 $x, y, z \geq 2$, 得原方

程组不存在正实数解.

4. 证明当 AB 是三个圆的公共弦,过 A 的不同于 AB 的任意一条直线确定相同的比 $XY:YZ$,这里 X 是在第一个圆上不同于 B 的任意一点,而 Y 与 Z 是 AX 交其它两个圆的交点(使 Y 标记在 X 与 Z 之间).

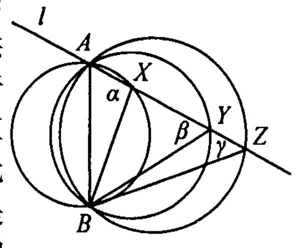

图 1

证法1　设 l 是一条过 A 但不同于 AB 的直线,连结 BA, BX, BY, BZ. 在图 1 中, $\angle AXB$, $\angle AYB$, $\angle AZB$ 的大小与 l 的选择无关. 由此推得对所有这样的 l,在 $\triangle BXY$ 的各角与 $\triangle BXZ$ 的各角大小都不变. 于是由相似三角形,知比 $XY:YZ$ 仍然是常数. 注意到它的成立与 X, Y, Z 与 A 的位置无关. 假设 X, Y, Z 都位于 A 的同侧(象在这个图形中), $\angle AXB=\alpha$, $\angle AYB=\beta$, $\angle AZB=\gamma$. 则 $\angle BXY=180°-\alpha$, $\angle BYX=\beta$, $\angle BYZ=180°-\beta$, $\angle BZY=\gamma$. 现在假设 l 的选择使 X 与 Y, Z 在 A 的相对的一侧. 现在因为 X 在弦 AB 的另一侧, $\angle AXB=180°-\alpha$,此时 $\angle BXY=180°-\alpha$ 和所有在这两个相关的三角形中的其它的角仍然是不变的. 若 l 的选择使 X 与 A 是同一点,则 l 是第一个圆的切线,此时 $\angle BXY=180°-\alpha$. 所有其它情形都可用相似的方法证明. 也就是说,各种情形中 $\triangle BXY$ 与 $\triangle BXZ$ 的组合图形的形状总是与图 1 中的一样. 从而原命题成立.

证法2　设 m 是 AB 的垂直平分线,设这三个圆的圆心分别是 O_1, O_2, O_3. 因为 AB 是所有这三个圆的公共弦,所以 O_1, O_2, O_3 都位于 m 上. 设 l 是过 A 且不同于 AB 的一条直线,假设 X, Y, Z 都位于 AB 的同一侧,如图 2. 设过 O_1, O_2, O_3 分别作 l 的垂线,垂足分别为 P, Q, R. 由垂径定理,得 $AX=2AP$, $AY=2AQ$, $AZ=2AR$.

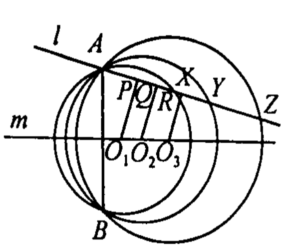

图 2

现在 $XY=AY-AX=2(AQ-AP)=2PQ$. 类似地, $YZ=2QR$.

因此 $XY:YZ=PQ:QR$. 又 $O_1P\parallel O_2Q\parallel O_3R$,故 $PQ:QR=O_1O_2:O_2O_3$. 因为这些圆心是确定的,比 $XY:YZ=O_1O_2:O_2O_3$ 是一个常数,不随 l 的选择而变化.

若 X, Y, Z 不都位于 AB 的同一侧,我们可用类似的证明得到相同的结果. 事实上,若 X 与 Y 在 AB 相对的一侧,则我们将有 $XY=AY+AX$,但因为在 $PQ=AQ+AP$ 这种情形里,一直有 $XY=2PQ$ 这种情形. 其它结论也可与此类似证得.

5. 设平面内由 n 个点组成的集合 S,使 S 中的任意两点至少相距 1 个单位. 证明存在一个 S 的子集 T,其中至少有 $\frac{n}{7}$ 个点,使 T 中的任意两点至少相距 $\sqrt{3}$ 个单位.

证明　我们用下面的方法构造集合 T: 假设 S 中的点在平面直角坐标系 xOy 内,且设 P 是 S 中 y 坐标最大的一点. 点 P 成为集合 T 的一个元素,现在从 S 中,我们除去 P 以及在 S 中与 P 的距离小于 $\sqrt{3}$ 个单位的所有点. 从余下的点中我们选择一个 y 坐标最大的点 Q 成为 T 的一个元素,且除去在 S 中与 Q 的距离小于 $\sqrt{3}$ 个单位的所有点. 我们连续用这个方法,直到 S 中所有的点取尽. 显然 T 中任意两点至少相距 $\sqrt{3}$ 个单位. 要证明 T 中至少有 $\frac{n}{7}$ 个点,我们必须证明在每个阶段不多于 6 个其它的点与 P 一起除去.

在这个过程中的某一个代表性的阶段,我们选择一个 y 坐标最大的点 P,故与 P 的距离小于 $\sqrt{3}$ 的任意点必须位于以 P 为圆

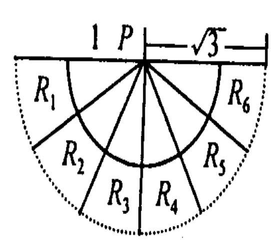

图 3

心, $\sqrt{3}$ 为半径的半圆区域内部(不包含边界),如图 3 所示. 又因为 S 中的任意两点至少相距 1 个单位,所以这些点必须位于半径为 1 的半圆的外部或半圆上(包含边界). 因此它们位于图 3 中半环形区域. 现在分割这个区域成 6 个全等的区域 $R_1, R_2, \cdots, R_6$,如图 3 所示.

我们将证明每一个区域至多包含 S 中的一个点. 因为所有 6 个区域是全等的,考虑其中的一个,如图 4 所示. 在这个阴影区域中的任意两点间的距离必小于线段 AB 的长度. PA, PB 的长度分别是 $\sqrt{3}$, 1,且 $\angle APB = 30°$. 若我们过 B 作 PA 的垂线,垂足为 C,则 PC 的长度是 $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 于是 BC 是 PA 的垂直平分线,因此 $AB = PB = 1$. 所以在这个区域中任意两点的距离小于 1. 故 $R_1, R_2, \cdots, R_6$ 中每一区域至多包含 S 中的一个点,命题得证.

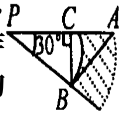

图 4

谈谈一元一次方程

余红兵 (苏州大学数学科学学院 215006)

一元一次方程,即是形如

$$ax + b = 0 \qquad (1)$$

的方程,其中 a, b 是给定的(复)数,且 $a \neq 0$. 这是代数方程中最为简单的方程.

方程(1)的解也具有相当简单的表示:其唯一的解是 $x = (-b) \div a$,即方程的解仅由其系数作除法运算而确定. 由此特别地得知,若一元一次方程的系数均是有理数,则其解也必是有理数. 这些简单的注意,往往是解决某些问题——特别是涉及整数及有理数的问题的基本出发点. 本文将通过一些例子,表现一元一次方程在这一方面的应用.

例 1 求出所有的实数 $a > 1$,使得方程

$$ax^2 + 2(2a - 1)x + 4a - 7 = 0 \qquad (2)$$

至少有一个整数根.

方程(2)是一个关于 x 的二次方程(a 视为参数). 最直接的方法或许是先由求根公式解出根,得出

$$x = \frac{1}{a}(-2a + 1 \pm \sqrt{3a + 1}),$$

但哪些实数 $a > 1$ 使上式右边的两项中至少有一为整数,似不易确定.

处理问题的另一个方案是下面的间接方法:设方程(2)的两个根为 x_1, x_2,用韦达定理得出

$$x_1 + x_2 = -4 + \frac{2}{a}, \quad x_1 x_2 = 4 - \frac{7}{a}.$$

由这两式消去 a,产生二元不定方程

$$2x_1 x_2 + 7(x_1 + x_2) + 20 = 0. \qquad (3)$$

若我们能由(3)确定根 x_1, x_2,则由此可求出相应的 a 值. 然而,易于得知,当这两个根之一为整数时,另一根却不一定为整数,因此我们面临(3)这样的方程便束手无策,只能改弦更张.

解决问题的出发点说穿了非常简单:方程(2)视为关于 a 的方程,则是一个一次方程(x 现在作为参数). 我们将方程变形为

$$a(x + 2)^2 = 2x + 7.$$

显然 $x + 2 \neq 0$(否则 $x = -2$,但此时 $2x + 7 \neq 0$),于是由上式可解出

$$a = \frac{2x + 7}{(x + 2)^2}.$$

由 $a > 1$,得 $2x + 7 > (x + 2)^2$,易解得 $-3 < x < 1$. 因 $x \neq -2$,故这范围内的整数 x 只有 -1 及 0;相应的 a 为 5 及 $\frac{7}{4}$.

例 2 设 a, b 为有理数,满足

$$a^5 + b^5 = 2a^2 b^2. \qquad (4)$$

证明 $1 - ab$ 是有理数的平方.

我们希望通过恒等变形,给出 $1 - ab$ 为有理数平方的显式表示. 为了这个目的,我们注意,(4)式左、右两端分别是关于 a, b 的五次及四次的齐次式,而 $5 - 4 = 1$,由此我们采用下面的变形:若 $b = 0$,则结论显然成立;当 $b \neq$