2003 年英国数学奥林匹克第 2 轮试题

1. 对于任意整数 $n>1$，设 $P(n)$ 为 n 的最大质因数. 求所有的三个不同的正整数 x、y、z，使其满足：① x,y,z 是等差数列；② $P(xyz)\le 3$.

2. $\triangle ABC$ 中，D 为 AB 上一点，且 $AD=\frac{1}{4}AB$. 过 D 的射线 l 与 C 在 AB 的同侧，交 $\triangle ABC$ 的外接圆于 P，且 $\angle ADP=\angle ACB$. 证明：$PB=2PD$.

3. 设 $f:N\to N$ 是一个正整数集 N 的一一映射.

(1) 证明存在一个由正整数 $a,a+d,a+2d$ 组成的等差数列，这里 $d>0$，使 $f(a)<f(a+d)<f(a+2d)$；

(2) 一定存在一个等差数列 $a,a+d,\cdots,a+2003d$，这里 $d>0$，使 $f(a)<f(a+d)<\cdots<f(a+2003d)$ 吗？

4. 设 f 是一个定义在非负整数集内的非负整数函数，使所有 $n\ge 0$，有 ① $(f(2n+1))^2-(f(2n))^2=6f(n)+1$；② $f(2n)\ge f(n)$. 问在函数 f 的象中有多少个数小于 2003？

参考答案

1. $(x,y,z)=(k,2k,3k),(2k,3k,4k)$，或 $(2k,9k,16k)$，这里 $k=2^m\cdot 3^n$.

不妨设 $x<y<z$. 若先求出 X、Y、Z 不含任何公因数 k 的解 (X,Y,Z)，则全部的解集 (x,y,z) 为 (kX,kY,kZ)，其中 $k=2^m\cdot 3^n$.

记 $W=Y-X$，则 $Z=X+2W$ 与 X 具有相同奇偶性.

因此 X 与 Y 必须具有相异奇偶性. 否则，X 与 Y 同偶或同奇. 若 X 与 Y 同偶，则 X、Y、Z 都是偶数，有公因数 2，矛盾；若 X 与 Y 同奇，则 X、Y、Z 都是 3 的幂(含指数为 0 的情形). 不妨设 $X=3^a$，$Y=3^b$，$Z=3^c$，这里 $0\le a<b<c$，则 $3^a+3^c=2\cdot 3^b$，即 $3^a(1+3^{c-a})=2\cdot 3^b$，则 $1+3^{c-a}=2\cdot 3^{b-a}$. 令 $b-a=S$，$c-a=t$，这里 $0<S<t$，则 $1+3^t=2\cdot 3^S$. 而 $t\ge S+1$，则 $1+3^t\ge 1+3^{S+1}=1+3\cdot 3^S>2\cdot 3^S$，矛盾.

(1) 若 x 是奇数，则 Z 是大于 1 的奇数，于是 Z 是 3 的幂. 若 $x>1$，则 X 也是 3 的幂，于是 $Y=\frac{X+Z}{2}$ 也含 3 的幂，矛盾. 因此 X 必是 1. 若 $Z=3^n$，

则 $Y=\frac{X+Z}{2}=\frac{1+(4-1)^n}{2}$

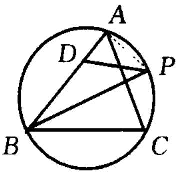
$=\frac{1+(-1)^n+(-1)^{n-1}\cdot 4n-4^2\cdot m}{2}$.

其中 $4^2\cdot m$ 表示所有含 4^2 或其更高次项的和). 因此 n 是奇数，否则 Y 是奇数，矛盾. 从而 $Y\equiv 2\pmod 4$. 但 Y 是一个 2 的幂，这是因为 Y 显然不含大于 3 的质因数，也不含质因数 3. 否则不妨设 $Y=\frac{1+3^n}{2}=3u$，则 $1+3^n=6u$. 于是 $Y=2$，$Z=3$.

(2) 若 X 是偶数，则 Y 是奇数且是一个 3 的幂. 若 X 能被 3 整除，则 $Z=2Y-X$ 也能被 3 整除，矛盾. 因此 X 必是一个 2 的幂. 类似地，Z 必是一个 2 的幂. 若 X 能被 4 整除，则由于 Z 是一个 2 的更大的幂，它也必能被 4 整除. 于是 $2W=Z-X$ 能被 4 整除，故 $Y=X+W$ 能被 2 整除，矛盾. 因此 X 必是 2. 容易验算 $(X,Y,Z)=(2,3,4),(2,9,16)$ 是它的解. Y 能被 27 整除时无解. 证明如下：容易由 $Z=2^{n+1}$ 验算出 $Y=\frac{Z+X}{2}=2^n+1\equiv 3,5,9,17,6,11,21,4,0,26,24,20,12,23,18,8,15,2,3,\cdots\pmod{27}$，其中 $n=1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,\cdots$. 于是我们必有 $n\equiv 9\pmod{18}$ 时，得 Y 能被 27 整除.

但 $2^n+1\equiv 3,5,9,17,14,8,15,10,0,18,16,12,4,7,13,6,11,2,3,\cdots\pmod{19}$，所以若 $n\equiv 9\pmod{18}$，则 Y 也能被 19 整除. 于是 Y 不能是一个大于 9 的 3 的幂.

2. 如图，连结 AP，则 $\angle APB=\angle ACB$，又 $\angle ADP=\angle ACB$，所以 $\angle APB=\angle ADP$，故 $\triangle APB\backsim\triangle ADP$.



$\therefore PA^2=AD\cdot AB=4AD^2$，$PA=2AD$.

故 $PB=2PD$.

3. (1) 设 $f(a)=1$，参考 $a+1,a+2,a+4,a+8,a+16,a+32,\cdots$，显然其中任意相邻两项与 a 都构成等差数列，在这些等差数列中，必存在一个满足要求. 这是因为：假设不存在满足要求的等差数列，由于 $1=f(a)<f(a+2^i)$，其中 i 是非负整数，则必有 $f(a+2^i)>f(a+2^{i+1})$，即 $f(a+1)>f(a+2)>f(a+4)>f(a+8)>f(a+16)>f(a+32)>\cdots$. 但 $f(a+1)$ 是一个确定的正整数，且 $f:N\to N$ 是一个正整数集 N 的一一映射，从而小于 $f(a+1)$ 的正整数有有限个，故在 $f(a+2^i)$ 中必存在一个 $f(a+2^k)$，满足 $f(a+1)>\cdots>f(a+2^{k-1})$ 且 $f(a+2^k)>f(a+1)$，其中 i、$k\in N$. 则 $f(a)<f(a+2^{k-1})<f(a+2^k)$，这时公差 $d=2^{k-1}$ 的等差数列 $a,a+2^{k-1},a+2^k$ 满足要求，矛盾.

(2) 不一定存在.

构造映射 :1 →1 , ‖ 2 →2 , ‖ 4 →3 ,3 →4 , ‖ 8 →5 ,7 →6 ,6 →7 ,5 →8 , ‖ 16 →8 ,15 →10 ,14 →11 ,13 →12 ,12 →13 ,11 →14 ,10 →15 ,9 →16 , ‖ …以象 f 满足 $2^{n-1} < f \le 2^n$ 分成若干档,其中 n 是非负整数. 上述映射中“ ‖ ”为分档线.

设 $f(a+2003d)$ 在第 i 档,而第 i 档的最大的象是 2^{i-1}. 分析各档里象的情况如下:

前 $i-3$ 档	第 $i-2$ 档	第 $i-1$ 档	第 i 档
$1\sim 2^{i-4}$	$2^{i-4}+1\sim 2^{i-3}$	$2^{i-3}+1\sim 2^{i-2}$	$2^{i-2}+1\sim 2^{i-1}$

由于第 $i-1$ 档里象的个数为 $2^{i-2}-2^{i-3}=2^{i-3}$,又每档里最多只能选择一个,否则将出现 $f(a+id)>f(a+(i+1)d)$,故 $d>2^{i-4}$. 从而前 $i-3$ 档里最多只能选择一个. 故总共最多只能选择四个.

倘若从中选择五个及五个以上,由抽屉原理知,必定在后三档里存在某一档至少被选择了两个.

因此题设中的映射不一定存在满足要求的等差数列.

4. 128.

因为 $(f(2n+))^2=(f(2n))^2+6f(n)+1>(f(2n))^2$, $(f(2n+1))^2=(f(2n))^2+6f(n)+1\le(f(2n))^2+6f(2n)+1<(f(2n)+3)^2$,所以 $f(2n)<f(2n+1)<f(2n)+3$. 从而 $f(2n+1)=f(2n)+1$ 或 $f(2n)+2$. 但 $(f(2n+1))^2=(f(2n))^2+6f(n)+1$ 与 $(f(2n))^2$ 具有相反奇偶性,因此必有 $f(2n+1)=f(2n)+1$. 于是 $f(2n)=3f(n)$.

从而,特别地, $f(0)=0$,故 $f(1)=1$. 一般地,由归纳推理得, f 是严格单调递增的. 证明如下:

当 $n\le 1$ 时, $f(0)<f(1)$,显然成立;假设 $n\le 2k+1$ 时, $f(0)<f(1)<\cdots<f(2k)<f(2k+1)$. 则 $f(2k+2)=3f(k+1)\ge 3(f(k)+1)=3f(k)+3$,而 $f(2k+1)=f(2k)+1=3f(k)+1$,故 $f(2k+1)<f(2k+2)$.

又因为 $f(2k+3)=f(2n+2)+1$,所以 $f(2k+1)<f(2k+2)<f(2k+3)$.

从而 $f(0)<f(1)<f(2)\cdots<f(2k)<f(2k+1)<f(2k+2)<2f(2k+3)$. 因此 f 是严格单调递增的.

显然 $f(128)=3^7=2187>2003$.

$f(127)=f(126)+1=3f(63)+1=3f(62)+4=9f(31)+4=9f(30)+13=27f(15)+13=27f(14)+40=81f(7)+40=81f(6)+121=243f(3)+121=243f(2)+364=729f(1)+364=729+364=1093<2003$.

因此有 128 个相异数 $f(0), f(1), \cdots, f(127)$ 小于 2003.

(费振鹏　供题)

会　议　简　讯

全国第五届初等数学研究学术交流会于 2003 年 8 月 10 日～13 日在江西赣南师范学院举行. 出席会议的有来自全国 19 个省市的代表 84 人. 会议共收到论文 158 篇,其中 68 篇在会上宣读,41 篇被收入《中国初等数学研究文集(二)》. 本次交流会是 21 世纪我国首次初等数学研究的学术盛会. 美籍中国数学大师陈省身对“在本世纪中国要成为数学强国”抱有期望,并提出“中国数学的根必须在中国,使中国数学在 21 世纪占有若干方面的优势. 而办法很简单,就是选拔培养人才,把中国变成一个输送数学家的工厂”,这使代表们深受鼓舞,大会安排了一系列的学术活动.

会议期间,召开了中国初等数学研究工作协调组第九次工作会议,讨论了若干重要事项,对协调办事组做了个别人员调整,并最后审定了首届“青年初等数学研究奖”及提名奖的如下获奖名单:

青年初等数学研究奖(4 名):

张志华　梁卷明　苏昌槛　夏建光

青年初等数学研究提名奖(七名):

杨志明　陶楚国　孙文彩　杨　飞　夏云峰
多力肯 塔西　刘　健

协调组建议,对评奖活动除坚持“每次在不超过 40 岁的申请者撰写的论文中,评选获奖者至多 5 名,提名奖至多 10 名,在会议召开前评审,在交流会上颁奖,由承办单位组织评选,并在获奖证书上加盖承办单位公章”之外,再做如下说明:(1) 仅在申报者中评选;(2) 申报者除提交反映自己所获研究成果的一篇论文之外,须如实地说明自己的出生年月,简要介绍自己初数研究的主要成果;(3) 会议的论文,只考虑第一作者.

协调组建议并经全体代表确认:全国第六届初等数学研究学术交流会 2006 年在湖北举行,由湖北大学《中学数学》编辑部和宜昌市教研中心负责筹备承办.

时代在前进,人员在接替,现代科技手段也在飞速发展. 因此,初等数学的概念也必然会有所拓展,研究内容会有所更新,过去认为是高等数学的基础部分,也许很快会成为广大中学数学教师的研究课题. 希望广大初数工作者和爱好者,发奋进取,拿出高水平的研究成果,积极申报“青年初等数学研究奖”,迎接 2006 年三峡之滨的全国第六届初数盛会.

(杨之供稿)