

活动课例《简单的线性规划问题》的教学尝试设计说明

费振鹏 (江苏省盐城市城区永丰中学 224054)

九年义务教育初中数学教学大纲明确指出初中数学的教学目的:使学生学好当代社会中每一个公民适应日常生活、参加生产和进一步学习所必需的代数、几何的基础知识与基本技能,进一步培养运算能力,发展逻辑思维能力 and 空间观念,并能够运用所学知识解决简单的实际问题,培养学生良好的个性品质和初步的辩证唯物主义的观点。

我国著名数学家华罗庚,就曾把数学理论研究和生产实践紧密结合,并应用于国民经济建设领域,取得了显著的经济效益。数学的应用,正如他的精辟阐释“宇宙之大,粒子之微,火箭之速,化工之巧,地球之变,生物之谜,日用之繁无处不用数学”。荷兰数学家弗赖登塔尔(H. Freudenthal)也曾指出“数学源于现实,也必须寓于现实,并且用于现实”。

随着素质教育的不断深入,我们作为一线的数学教育工作者应该积极重视数学的应用教学,这是时代的需要,是社会发展的需要,也是人们生存与现代化建设的需要。当然也符合新课程标准的要求:“关注学生已有的生活经验和知识背景,关注学生的实践活动和直接经验,关注学生的自主探索和合作交流,关注学生的数学情感和情绪体验,使学生投入到丰富多彩、充满活力的数学学习过程中去,使数学学习具有价值,富有意义,有利于学生通过主动参与、积极思考、与人合作交流和创新等过程,获得数学学习的自信心和兴趣,理解数学的基本思想和方法,体会数学的探索过程,体会数学与自然、社会和人类生活的联系,获得情感、能力、知识的全面发展。”

因此,教师必须对学生加强数学能够广泛应用的教育,使他们受到把实际问题转化成数学问题的训练,从而培养他们会用所学的数学知识去分析问题和解决问题的能力,形成用数学的意识,来充实目前数学教育的内涵,出色完成教学任务。

在数学活动课程教学中,我设计了活动课例《简单的线性规划问题》,下面试对此作如下说明,以供探讨。

1 设立课题,编制问题,确立目的

教师要认真研究现行的人教版编写的九年义务教育三年制初级中学代数、几何课程的有关内容,把纯数学的理论知识融于日常生活或生产实践中遇到的一些实际问题。这就要我们关注生活,留心周围的新生事物,编拟切合教学内容的问题。诸如生产制造、市场营销、银行贷款、股票行情、出租车费、自动扶梯运行、统筹运输、电话资费、电脑上网等等热点现实问题,都可以巧妙地与相应的数学知识结合得到有意义的实际应用问题。

笔者通过设立各类应用数学课题的教学,使学生领悟

到数学与日常生活、相关学科以及周围的现实有着广泛的联系,激发他们学数学的兴趣,体会学数学的意义,增强用数学的热情。

附文为进行拓宽展开式补充教学的活动课例,它借助人教社编写的九年义务教育三年制初级中学的《代数》第三册《§13.5 一次函数的图象和性质》的内容,把其中纯数学的理论知识应用于指导我们解决日常生活或生产实践中遇到的一些实际问题。

2 设计程序,选择方法,把握典型

教师通过引用生动的、与教学内容吻合的事例,把新鲜的事物、新颖的问题展现在我们的学生面前,自然地导入新课,学生在故事中认识到数学应用的意义。进而,教师提出问题激发他们学数学的兴趣,增强他们用数学的意识;吸引他们积极思考,充分发挥他们的主观能动性。整个教学过程教师还应注意利用最典型的问题按梯度由浅入深,分散难点,前后铺垫,互相启发,做到有利于学生的全面接受。

近年来中考和竞赛的试题中不断出现与一次函数相关的实际问题,在这里,附文精选了四个简单的线性规划问题,分析了这些问题与数学知识的联系,建立了数学模式——一次函数模型,归纳总结出不同问题的不同解决方法。最后利用精心选编与课题有关的习题,供学生课后练习巩固。

3 观察事物,寻找问题,探索解法

教师引导学生主动地去观察周围世界的事物,分析现实世界中的事物与数学的联系,找到其中具有实际意义的问题,并能将这些实际问题转化成便于处理的数学问题,即建立数学模型,学会寻找或创造解决问题的数学方法。这些实际问题往往条件不充分或解答不唯一,通过这样的实践可以加强学生用数学的意识和能力,培养学生研究讨论条件和结论的能力,培养学生发散性思维、开放性思维、创造性思维,有助于学生形成肯于钻研、善于思考、勤于动手和仔细认真的良好学风。

4 总结经验,交流思想,提高素质

教师要求学生在学完本节课(包括课内课外)从模仿到创新的基础上,领会数学建模的思想方法,总结在被动和主动学习、探索研究简单的线性规划问题的过程中所得到的解决方法,让学生自己写出在学习和实践中研究的心得体会,教师批阅后,可以将有创见的心得在全班交流学习,从而提高全体同学的整体数学素质。

综上所述,《简单的线性规划问题》的活动课教学设计,着重培养学生的数学建模能力以及探索研究的创新意

识,使学生形成良好的数学意识和数学思维.

附:数学活动课课例《简单的线性规划问题》

简单的线性规划问题

近年来,各级各类数学竞赛中频频出现线性规划问题.所谓线性规划,是指求线性函数在线性(不等式或等式)约束下达最(小或大)值的问题.线性规划广泛应用于工农业、军事、交通运输、决策管理与规划、科学实验等领域,本文通过以下例题介绍常用的解题思路和方法.

1 运用数量关系解题

例1 某家电生产企业根据市场调查分析,决定调整产品生产方案,准备每周(按120个工时计算)生产空调器、彩电、冰箱共360台,且冰箱至少生产60台.已知生产这些家电产品每台所需工时和每台产值如下表:

家电名称	空调器	彩电	冰箱
工 时	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
产值(千元)	4	3	2

问每周应生产空调器、彩电、冰箱各多少台,才能使产值最高.最高产值是多少(以千元为单位)?

(1997年第十二届江苏省初中数学竞赛)

解 设每周生产空调器、彩电、冰箱分别为 x 台、 y 台、 z 台,每周产值为 f 元,则

$$f = 4x + 3y + 2z.$$

其中 x, y, z 满足

$$\begin{cases} x + y + z = 360 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{4}z = 120 \\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 60 \end{cases}$$

由、得 $y = 360 - 3x, z = 2x$.

$$\text{则由} \begin{cases} x \geq 0 \\ 360 - 3x \geq 0 \\ 2x \geq 60 \end{cases}$$

得 $30 \leq x \leq 120$.

$$\text{故 } f = 3(x + y + z) + x - z = 1080 - x.$$

当 $x = 30$ 时, $f_{\max} = 1080 - 30 = 1050$.

从而, $y = 270, z = 60$.

即每周生产空调器30台,彩电270台,冰箱60台,才能使产值最高,最高产值为1050千元.

2 运用图表作业解题

例2 A 市、 B 市和 C 市分别有某种机器10台、10台和8台.现在决定把这些机器支援给 D 市18台、 E 市10台.已知从 A 市调运一台机器到 D 市、 E 市的运费分别为200元和800元;从 B 市调运一台机器到 D 市、 E 市的运费分别为300元和700元;从 C 市调运一台机器到 D 市、 E 市的运费分别为400元和500元.

(1) 设从 A 市、 B 市各调 x 台机器到 D 市,当28台机器全部调运完毕后,求总运费 W (元) 关于 x (台) 的函数式,并求 W 的最小值和最大值;

(2) 设从 A 市调 x 台到 D 市, B 市调 y 台到 D 市,当28台机器全部调运完毕后,用 x, y 表示总运费 W (元),并求 W 的最小值和最大值.

(1998年全国初中数学竞赛)

解 (1)(2) 这两问都可以运用数量关系解题,具体解法参见《中等数学》1998年第3期第34页或1999年第4期第3页文.

下面以第(2)问为例说明运用图表作业解题.

(2) (表上作业法)

由题意,易得 $W(x, y) = 17200 - 500x - 300y$.

求最小总运费 W_{\min} .

表中对于 D 市、 E 市可供的 A, B, C 三地进行比较,逐次选取较小运费地,尽可能的调运,得调运方案如表1所示:

表1

	A	B	C	需量
D	200×10	300×8	400×0	18
E	800×0	700×2	500×8	10
供量	10	10	8	

即当 $x = 10, y = 8$ 时,最小总运费 $W_{\min} = 9800$ (元).

求最大总运费 W_{\max} .

类似地,可得调运方案如表2所示:

表2

	A	B	C	需量
D	200×0	300×10	400×8	18
E	800×10	700×0	500×0	10
供量	10	10	8	

即当 $x = 0, y = 10$ 时,最大总运费 $W_{\max} = 14200$ (元).

(3) (图上作业法)

由题意,易得 $W(x, y) = 17200 - 500x - 300y$.

求最小总运费 W_{\min} .

图中所标运费可以看作是单位运量.供量用正数表示,需量则用负数表示,对于 D 市、 E 市可供的 A, B, C 三地进行比较,逐次选取单位运量较小的,尽可能的调运,得调运方案如图1所示:

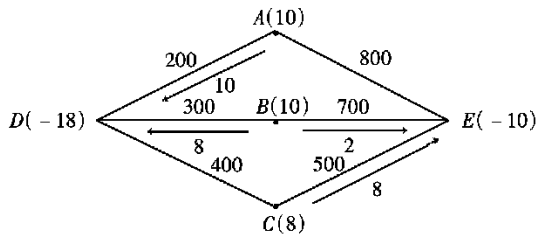


图1

即当 $x = 10, y = 8$ 时,最小总运费 $W_{\min} = 9800$ (元).

求最大总运费 W_{\max} .

类似地,可得调运方案如图2所示:

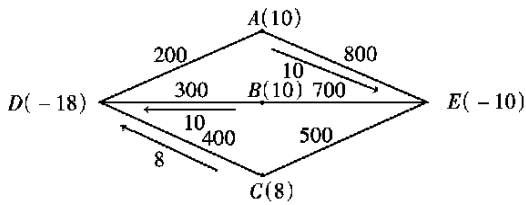


图2

即当 $x = 0, y = 10$ 时,最大总运费 $W_{\max} = 14200$ (元).

3 运用图象性质解题

例3 某工厂制造A、B两种产品,制造产品A每吨需用煤9吨,电力4千瓦,3个工作日;制造产品B每吨需用煤5吨,电力5千瓦,10个工作日.已知制造产品A和B每吨分别获利7千元和12千元,现在该厂由于条件限制,只有煤360吨,电力200千瓦,工作日300个可以利用,问A、B两种产品各应生产多少吨才能获利最大.最大利润是多少?

解 设A、B两种产品分别生产 x 吨、 y 吨,利润为 f 千元,则

$$f = 7x + 12y.$$

其中 x, y 满足

$$\begin{cases} 9x + 5y = 360 \\ 4x + 5y = 200 \\ 3x + 10y = 300 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

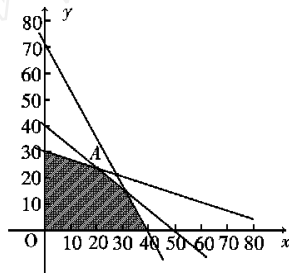


图3

如图3所示,阴影部分即为这个线性规划问题的可行区域.

$$-\frac{4}{5} < -\frac{7}{12} < -\frac{3}{10},$$

平行直线系 $f = 7x + 12y$ 过点 $A(20, 24)$ 即当 $x = 20, y = 24$ 时, $f_{\max} = 7 \times 20 + 12 \times 24 = 140 + 288 = 428$ (千元).

即产品A生产20吨,产品B生产24吨,获利最大,最大利润为428千元.

4 运用枚举验证解题

例4 某人有一楼房一幢,室内面积共 180m^2 ,拟分隔成两类房间作为旅游客房.大房间每间面积为 18m^2 ,可住游客5名,每名游客每天住宿费为40元;小房间每间面积为 15m^2 ,可住游客3名,每名游客每天住宿费为50元;装修大房间每间需1000元,装修小房间每间需600元.如果他只能筹款8000元用于装修,且游客能住满客房,他应隔出大房间和小房间各多少间,能获得最大收益.最大收益是多少?

解 设隔出大、小房间分别为 x 间、 y 间,收益为 f 元,则 $f = 200x + 150y$.

其中 x, y 满足

$$\begin{cases} 18x + 15y = 180 \\ 1000x + 600y = 8000 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 5y = 60 \\ 5x + 3y = 40 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

如图4所示,由图解法易得 $f = 200x + 150y$ 过点 $A\left(\frac{20}{7}, \frac{60}{7}\right)$ 时,目标函数 f 取得最大值.

但 x, y 必须是整数,还需在可行区域内找出使目标函数 f 取得最大值的整点.

显然目标函数 f 取得最大值的整点一定是分布在可行区域的右上侧,则利用枚举法即可求出整点最优解.

这些整点有: $(0, 12), (1, 10), (2, 9), (3, 8), (4, 6), (5, 5), (6, 3), (7, 1), (8, 0)$, 分别代入 $f = 200x + 150y$, 逐一验证,可得取整点 $(0, 12)$ 或 $(3, 8)$ 时, $f_{\max} = 200 \times 0 + 150 \times 12 = 200 \times 3 + 150 \times 8 = 1800$ (元).

所以要获得最大收益,有两种方案:

只隔出小房间12间;

隔出大房间3间,小房间8间.

最大收益为1800元.

练习题

1. 20个农场职工种50公顷田地,这些地可以种蔬菜、棉花或水稻,如果种这些农作物每公顷所需的职工和预计的产值如下:

作物名称	每公顷需职工	每公顷预计产值(元)
蔬菜	$\frac{1}{2}$	11000
棉花	$\frac{1}{3}$	7500
水稻	$\frac{1}{4}$	6000

问怎样安排,才能使每公顷地都种上作物,所有职工都工作,而且农作物的预计总产值达到最高.最高预计总产值是多少?

2. 今年甲、乙两矿生产相同的矿石,甲、乙每月的产量分别为10万吨和8万吨;又有A、B两工厂每月分别需要矿石6万吨和12万吨.已知甲、乙与A、B的距离由图5标出(单位:千米),问怎样调运才能使总运输量(单位:万吨·千米)最小.最小总运输量是多少.怎样调运总运输量最大.最大总运输量是多少?

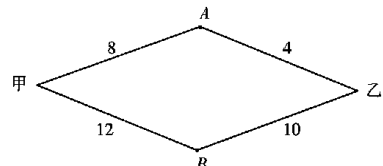


图5

3. 某公司在A、B两地分别有库存机器16台、12台,现要运往甲、乙两地,其中甲地15台,乙地13台.已知从A地运一台机器到甲地的运费为500元,到乙地的运费为400元;从B地运一台机器到甲地的运费为300元,到乙地的运费为600元.问应设计怎样的调运方案,才能使这些机

器的总运费最省,此时总运费是多少?

4. 甲、乙两个粮库要向 A 、 B 两镇运送大米,已知甲库可调出 100 吨大米,乙库可调出 80 吨大米, A 镇需 70 吨大米, B 镇需 110 吨大米.两库到两镇的路程和运费如下表:

	路程(千米)		运费(元/吨·千米)	
	甲库	乙库	甲库	乙库
A 镇	20	15	12	12
B 镇	25	20	10	8

问:(1)这两个粮库各运往 A 、 B 两镇多少吨大米,才能使总运费最省,此时总运费是多少?

(2)最不合理的调运方案是什么?它使国家造成不该有的损失是多少?

5. 两个电脑仓库供应三所学校电脑,甲仓库有 12 台,乙仓库有 20 台; A 校需 9 台, B 校需 15 台, C 校需 8 台.已知甲仓库到 A 、 B 、 C 三校的距离依次为 10 公里、5 公里、6 公里;乙仓库到 A 、 B 、 C 三校的距离依次为 4 公里、8 公里、15 公里.若每台每公里的运费为常数 a 元,则甲仓库供应给 A 校、 B 校、 C 校各多少台,使总运输费用最省?

(1998 年上海市初中数学竞赛)

6. 某两个煤厂 A_1 、 A_2 每月进煤数量分别为 60 吨和 100 吨,联合供应 3 个居民区 B_1 、 B_2 、 B_3 ,3 个居民区每月对煤的需求量依次分别为 50 吨、70 吨、40 吨,煤厂 A_1 离 3 个居民区 B_1 、 B_2 、 B_3 的距离依次分别为 10 千米、5 千米、6 千米,煤厂 A_2 离 3 个居民区 B_1 、 B_2 、 B_3 的距离依次分别为 4 千米、8 千米、12 千米.问如何分配供煤量使得运输量(单位:吨·千米)达到最小,最小运输量是多少?

7. 某厂拟生产甲、乙两种适销产品,每件销售收入分别为 3、2 千元/件.甲、乙产品都要在 A 、 B 两种设备上加工,所需工时甲在 A 、 B 两种设备上分别为 1、2 台时/件,乙在 A 、 B 设备上分别为 2、1 台时/件. A 、 B 设备每月有效可使用台时数分别为 400、500. 如何安排生产,使产品销售总收入最大,最大总收入是多少?

(1999 年上海市第八届中学生数学知识应用竞赛初赛)

8. 某工厂在计划内要安排生产两种产品,生产每件产品所需机时、工时、获利情况如下表,在不超过总机时 100 和总工时 120 的条件下,应如何安排生产使获利最大,最大利润是多少?

	机时	工时	获利(千元)
	2	4	6
	3	2	4

9. 投资生产 A 产品时,每生产一百吨需资金 200 万元,需场地 200m^2 ,可获利润 300 万元;投资生产 B 产品时,每生产一百米需要资金 300 万元,需要场地 100m^2 ,可获利润 200 万元,现某单位可使用资金 1400 万元,场地 900m^2 ,问应作怎样的组合投资,可使所获利润最多,最大利润是

多少?

(1998 年上海市第七届中学生数学知识应用竞赛初赛)

10. 某钢厂用 A 原料 2 吨和 B 原料 4 吨可产出 1 吨甲种钢管;用 A 原料 5 吨和 B 原料 3 吨可产出 1 吨乙种钢管.这两种钢管在北京、上海、广州三地销售所得单位利润(单位:万元/吨)如下表所示:

	销售甲种钢管的单位利润(万元/吨)	销售乙种钢管的单位利润(万元/吨)
北京	2	6
上海	3	4
广州	4	2

现根据市场供求信息: A 、 B 原料的周供应量分别是 10 吨、12 吨;每周甲种钢管生产不能超过 2.5 吨,乙种钢管生产不能超过 1.5 吨,且只能将全部钢管销往同一地方.问这两种钢管分别生产多少吨,销往何地,才能使一周的总利润最大,最大总利润是多少?

(《中等数学》1999 年第 3 期,数学奥林匹克初中训练题 38)

11. 某运输公司有 7 辆载重量为 6 吨的 A 型卡车与 4 辆载重量为 10 吨的 B 型卡车,有 9 名驾驶员,在建筑某段高速公路中,此公司承包了每天至少搬运 360 吨沥青的任务,已知每辆卡车每天往返的次数为 A 型车 8 次, B 型车 6 次,每辆卡车每天往返的成本费为 A 型车 160 元, B 型车 252 元,每天派出 A 型车与 B 型车各多少辆,公司所花的成本费最低,最低成本费是多少?

答案与提示

1. 种蔬菜 30 公顷,不种棉花,种水稻 20 公顷,预计总产值最高,最高预计总产值为 450000 元.

2. (1) 甲矿不运给 A 厂,运给 B 厂 10 万吨;乙矿运给 A 厂 6 万吨,运给 B 厂 2 万吨时,总运输量最小,最小总运输量为 164 万吨·千米.

(2) 甲矿运给 A 厂 6 万吨,运给 B 厂 4 万吨;乙矿不运给 A 厂,运给 B 厂 8 万吨时,总运输量最大,最大总运输量为 176 万吨·千米.

3. 从 A 地调往甲地 3 台,乙地 13 台;从 B 地调往甲地 12 台,乙地 0 台,可使总运费最省,此时总运费为 10300 元.

4. (1) 甲库运往 A 镇 70 吨,运往 B 镇 30 吨;乙库不运往 A 镇,运往 B 镇 80 吨时,总运费最省,总运费为 37100 元;

(2) 甲库不运往 A 镇,运往 B 镇 100 吨;乙库运往 A 镇 70 吨,运往 B 镇 10 吨时最不合理,此时总运费最多,总运费为 39200 元,使国家造成不该有的损失为 2100 元.

5. 甲仓库供应给 A 校 0 台, B 校 4 台, C 校 8 台.

6. A_1 不运往 B_1 ,运往 B_2 20 吨,运往 B_3 40 吨; A_2 运往 B_1 50 吨,运往 B_2 50 吨,不运往 B_3 ,可使运输量最小,最小运输量为 940 吨·千米.

7. 生产甲种产品 200 件,乙种产品 100 件,使产品销售

收入最大,最大销售总收入为 800 千元.

8. 生产第 一种产品 20 件,第 一种产品 20 件获利最大,最大利润是 200 千元.

9. A 产品生产 $\frac{13}{4}$ 百吨, B 产品生产 $\frac{3}{2}$ 百米时,可使所获利润最多,最大利润是 1475 万元.

10. 甲、乙两种钢管分别生产 $\frac{5}{4}$ 吨、 $\frac{3}{2}$ 吨且全部销往北京,可使一周的总利润最大,最大总利润是 11.5 万元.

11. 每天派出 A 型车 5 辆, B 型车 2 辆,公司所花的成本费最低,最低成本费是 1304 元.

实践题

注意观察周围世界的事物,把其中与一次函数相关的实际问题记录下来,并运用数学建模方法予以探索,最终得出解决的结论.

心得题

请你把在学习、探索研究简单的线性规划问题的过程

中所得到的解决方法总结出来,写成论文.

参考文献

- 1 安培录. 如何寻找《线性规划问题》整点最优解. 数学通报, 2000, 3.
- 2 胡炳生. 运费、利润及其他. 中学数学, 1999, 1.
- 3 数学课程标准研制小组. 关于我国数学课程标准研制的初步设想. 数学通报, 1999, 4.
- 4 张奠宙执笔. 当前我国数学教育研究中的若干问题. 中学数学教学参考, 1999, 5.
- 5 杨骞. 着眼于数学应用的数学教学改革. 中学数学教学参考, 1999, 9.
- 6 严士健. 让数学成为每个人生活的组成部分. 中学数学教学参考, 1999, 11.
- 7 国家数学课程标准研制工作小组. 国家数学课程标准研制工作研讨会纪要(节选). 中学数学教学参考, 2000, 1 - 2.
- 8 李建华. 我国数学课程改革的问题与思考. 中学数学教学参考, 2000, 4.
- 9 张奠宙. 中小学数学课程建设的几点认识. 中学数学教学参考, 1999, 12.
- 10 郑毓信. 美国《数学课程标准(2000)》简介. 中学数学教学参考, 1999, 7.

(上接第 16 页)

“层次教学”能引导学生和帮助克服思维的障碍,推动思维多层面逐步深入的发展,使知识和能力不断升华.“层次教学”既使思维教学由表及里,深入清晰地揭示出整体知识的本质和内在规律,又可使学生的思维得到更广阔更深刻地拓展.

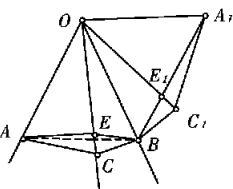
3 教具分析

针对本节课的特点,为了使教学结构更加紧凑,我分别在教学过程的四个环节中使用了投影,尤其在例 1 学习直线方程的互换和作图时,为了

更加突出直线方程不同形式所反映的侧重点,我坚持利用多媒体教学,充分发挥现代计算机技术对图象的高超处理能力,通过点的闪动,颜色的变换,变抽象为具体,变静态为动态,变瞬间为定格分析;充分展现点斜式,斜截式由一般到特殊的关系,充分展现截距式中两点式的特殊性,充分展现直线上两点的任意性而导致方程形式上互异.虽然只用了 2 分钟的软件辅助,却克服了思维和语言难以表达的障碍,解决了最难突破的关键点,也达到了画龙点睛,雪中送炭的效果.

(上接第 17 页)

在射线 OA, OB, OC 上取点 A, B, C , 使 $OA = OB = OC$, 在 OAB 平面上做 OBC_1, OBC, OC_1A_1

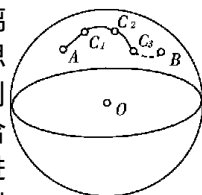


OCA . 连接 BA_1 交 OC_1 于 E_1 , 则只须证明 $AB < BA_1$. 在 OC 上取一点 E , 使 $OE = OE_1$, 连接 AE, BE . 由 $BA_1 = BE_1 + E_1A_1 = BE + EA > AB$ 知命题得证.

通过与学生的共同探究,已经对球面距离有较清楚的认识.如图,设 $A - C_1 - C_2 - C_3 - \dots - B$ 为球面上从 A 到 B 的一条最短路径, $A - C_1, C_1 - C_2, C_2 - C_3, \dots$ 为球面上的一段段圆弧.由问题

1 的结论知,这些圆弧为大圆弧.又由问题 4 的结论知该路径只能是一条连接 AB 的大圆的劣弧.

我们在对两点的球面距离的探究过程中,从学生的直觉思维出发,发现问题、提出问题,到实物验证,再到理论证明,符合学生的认知规律,培养了学生进行科学探究的能力.从问题 1 到



问题 2, 是三维向二维的转化,在问题 4 的证明中,巧妙的将三维图形展成二维,再将二维图形折成三维.从问题 2 到问题 3 是从形到数的转化.从问题 4 到整个问题的解决,体现了从有限到无限的转化.整堂课就是一个“问题解决”的过程.