# 平方差型不定方程的解法

费 振 鹏
（辽宁省沈阳市东北育才学校，110001）

中图分类号：O122.2　　文献标识码：A　　文章编号：1005－6416(2010)04－0007－04

（本讲适合高中）

平方差型不定方程，通常先选择适当的模数（或结合二项式定理）对其指数进行奇偶性分析，再因式分解，最后，通过对质因子的分析来求解．本文介绍高中数学竞赛中最常见的平方差型不定方程的解法．

## 1 质因子分析

**例 1** 求所有的整数 $x$，使得 $1+5\times2^x$ 为一个有理数的平方．[1]

（2008，克罗地亚国家集训（二年级））

**讲解** 分以下两种情形讨论：

(1) 若 $1+5\times2^x$ 为整数的平方，则 $x\in\mathbf{N}$.

设 $1+5\times2^x=y^2(y\in\mathbf{N})$. 故

$(y+1)(y-1)=5\times2^x$.

若 $x=0$，则 $y^2=6$，这不可能. 故 $x\neq0$.

又因为 $y+1$、$y-1$ 的奇偶性相同，所以，其均为偶数.

(i) 若 $\begin{cases}y+1=2^\alpha,\\ y-1=5\times2^\beta,\end{cases}$ 其中，$\alpha$、$\beta\in\mathbf{N}_+$，$\alpha+\beta=x$ 且 $\alpha>\beta$.

两式作差得 $2^\beta(2^{\alpha-\beta}-5)=2$.

故奇数 $2^{\alpha-\beta}-5=1$，即 $2^{\alpha-\beta}=6$.

这不可能.

(ii) 若 $\begin{cases}y+1=5\times2^\alpha,\\ y-1=2^\beta,\end{cases}$ 其中，$\alpha$、$\beta\in\mathbf{N}_+$，且 $\alpha+\beta=x$.

两式作差得 $5\times2^\alpha=2(2^{\beta-1}+1)$，即

$5\times2^{\alpha-1}=2^{\beta-1}+1$.

由 $5\mid(2^{\beta-1}+1)$ 知 $\beta\geqslant3$.

所以，$2\nmid(2^{\beta-1}+1)$.

故 $\alpha=1,\beta=3$.

从而，$x=\alpha+\beta=4$.

(2) 若 $1+5\times2^x$ 为分数的平方，则 $x\in\mathbf{Z}_-$.

设 $x=-y(y\in\mathbf{N}_+)$. 则

$1+5\times2^x=\dfrac{2^y+5}{2^y}$.

因为 $2\nmid(2^y+5)$，所以，$2\mid y$.

设 $y=2y_1$，$2^y+5=m^2(m\in\mathbf{N}_+)$. 则

$(m+2^{y_1})(m-2^{y_1})=5$.

因此，$\begin{cases}m+2^{y_1}=5,\\ m-2^{y_1}=1.\end{cases}$

两式作差得 $2^{y_1+1}=4$. 故 $y_1=1$.

从而，$y=2y_1=2$，$x=-y=-2$.

综上，$x=-2$ 或 4.

**例 2** 求方程 $3^x-5^y=z^2$ 的正整数解.

（2009，巴尔干地区数学奥林匹克）

**讲解** 取模 2 得

$0\equiv z^2\pmod 2\Rightarrow2\mid z$.

取模 4 得

$(-1)^x-1\equiv0\pmod 4\Rightarrow2\mid x$.

设 $x=2x_1$. 则 $(3^{x_1}+z)(3^{x_1}-z)=5^y$.

设 $\begin{cases}3^{x_1}+z=5^\alpha,\\ 3^{x_1}-z=5^\beta,\end{cases}$ 其中，$\alpha+\beta=y$，且 $\alpha>\beta$.

两式求和得

$2\times3^{x_1}=5^\beta(5^{\alpha-\beta}+1)$.

因此，$\beta=0$. 从而，$\alpha=y$.

(1) 若 $x_1=1$，则 $5^y+1=6$.

收稿日期：2009－12－31　修回日期：2010－01－26

故 $y=1, x=2x_1=2, z=5^y-3^{x_1}=2$.

从而,$(x,y,z)=(2,1,2)$.

(2)若 $x_1\geqslant 2$,则模9得

$5^y+1\equiv 0\pmod 9$,

即 $5^y\equiv -1\pmod 9$.

但对任意的 $y\in \mathbf{N}_+$,有

$5^y\equiv 5,7,-1,4,2,1\pmod 9$.

故 $y\equiv 3\pmod 6$.

设 $y=6y_1+3$. 则

$5^{6y_1+3}+1=2\times 3^{x_1}$.

而 $5^{6y_1+3}+1=(5^3)^{2y_1+1}+1$ 含因子

$5^3+1=2\times 3^2\times 7$,

但 $7\nmid 2\times 3^{x_1}$,故此时无正整数解.

综上,原方程的正整数解为

$(x,y,z)=(2,1,2)$.

## 2 奇偶性分析

**例3** 求方程 $2^x+2\,009=3^y\times 5^z$ 的所有非负整数解.

(2009,中欧数学奥林匹克)

**讲解** 显然,$y$、$z$ 不同时为0. 否则

右边 $=1<2\,009+2^x$.

矛盾.

若 $y>0$,则 $(-1)^x-1\equiv 0\pmod 3$.

因此,$2\mid x$.

若 $z>0$,则 $2^x-1\equiv 0\pmod 5$.

而 $2^x\equiv 2,-1,-2,1\pmod 5$,故 $4\mid x$.

总之 $x$ 是偶数.

若 $x=0$,则

$3^y\times 5^z=2^x+2\,009=2\,010$

$=2\times 3\times 5\times 67$,

这不可能.

若 $x=2$,则

$3^y\times 5^z=2^x+2\,009=2\,013$

$=3\times 11\times 61$,

这不可能.

而当 $x\geqslant 4$ 时,$3^y\times 5^z\equiv 1\pmod 8$.

由于 $3^y\equiv 3,1\pmod 8$,$5^z\equiv 5,1\pmod 8$,仅当 $3^y\equiv 1\pmod 8$ 且 $5^z\equiv 1\pmod 8$ 时,有

$3^y\times 5^z\equiv 1\pmod 8$.

故 $y$、$z$ 都是偶数.

设 $x=2x_1, y=2y_1, z=2z_1$. 则

$(3^{y_1}\times 5^{z_1}+2^{x_1})(3^{y_1}\times 5^{z_1}-2^{x_1})=7^2\times 41$.

因为 $3^{y_1}\times 5^{z_1}+2^{x_1}>3^{y_1}\times 5^{z_1}-2^{x_1}$,所以,

$\begin{cases}3^{y_1}\times 5^{z_1}+2^{x_1}=49,\\ 3^{y_1}\times 5^{z_1}-2^{x_1}=41;\end{cases}$

$\begin{cases}3^{y_1}\times 5^{z_1}+2^{x_1}=7\times 41,\\ 3^{y_1}\times 5^{z_1}-2^{x_1}=7;\end{cases}$

$\begin{cases}3^{y_1}\times 5^{z_1}+2^{x_1}=7^2\times 41,\\ 3^{y_1}\times 5^{z_1}-2^{x_1}=1.\end{cases}$

两式相减得 $2^{x_1+1}=8,280,2\,008$.

但仅有 $2^{x_1+1}=8$ 有解 $x_1=2$. 故 $x=4$.

从而,$3^{y_1}\times 5^{z_1}=45=3^2\times 5$.

因此,$y_1=2, z_1=1$. 故 $y=4, z=2$.

综上,$(x,y,z)=(4,4,2)$.

**例4** 求所有正整数 $n$,使得 $2^{n-1}n+1$ 是完全平方数.

(2004,斯洛文尼亚IMO国家队选拔测试)

**讲解** 设 $2^{n-1}n+1=m^2\ (m\in \mathbf{N}_+)$. 则

$2^{n-1}n=(m+1)(m-1)$.

而当 $n=1,2,3,4$ 时,$2^{n-1}n+1$ 均不是完全平方数.

故 $n\geqslant 5$,$16\mid (m+1)(m-1)$.

而 $m+1$、$m-1$ 奇偶性相同,故 $m+1$、$m-1$ 都是偶数,$m$ 是奇数.

设 $m=2k-1\ (k\in \mathbf{N}_+)$. 则

$2^{n-1}n=2k(2k-2)$.

从而,$2^{n-3}n=k(k-1)$.

而 $k$ 与 $k-1$ 具有不同的奇偶性,故 $2^{n-3}$ 只能是其中之一的约数.

又 $2^{n-3}n=k(k-1)\neq 0$,因此,

$2^{n-3}\leqslant k$.

进而,$n\geqslant k-1$.

故 $2^{n-3}\leqslant k\leqslant n+1$.

由函数性质或数学归纳法知,当 $n\geqslant 6$

时，$2^{n-3}>n+1$.

因此，$n\leqslant 5$. 而 $n\geqslant 5$，故 $n=5$.

此时，$2^{n-1}n+1=81$ 是完全平方数，满足要求.

综上，所求所有正整数 $n=5$.

## 3 整数范围分析

**例5** 求所有的整数对$(x,y)$，使得

$1+2^{x}+2^{2x+1}=y^{2}$.[2]

(第47届IMO)

**讲解** 当 $x=-1$ 时，左边为2不是完全平方数；当 $x\leqslant -2$ 时，左边不是整数.

设$(x,y)$是此方程的解. 则 $x\geqslant 0$ 且$(x,-y)$也是解.

当 $x=0$ 时，$y=\pm 2$，方程有解$(0,2)$，$(0,-2)$.

当 $x>0$ 时，设$(x,y)$为解，不妨设 $y>0$.

原方程即为

$2^{x}(1+2^{x+1})=(y+1)(y-1)$.

于是，$y-1$、$y+1$ 都为偶数，且其中只有一个是4的倍数.

因此，$x\geqslant 3$，且有一个因式被 $2^{x-1}$ 整除，不被 $2^{x}$ 整除.

故可设 $y=2^{x-1}m+\varepsilon$，其中，$m$ 是正奇数，$\varepsilon=\pm 1$.

代入原方程得

$2^{x}(1+2^{x+1})=(2^{x-1}m+\varepsilon)^{2}-1$

$=2^{2x-2}m^{2}+2^{x}m\varepsilon$,

即 $1+2^{x+1}=2^{x-2}m^{2}+m\varepsilon$.

从而，$1-m\varepsilon=2^{x-2}(m^{2}-8)$. ①

当 $\varepsilon=1$ 时，

$2^{x-2}(m^{2}-8)=1-m\varepsilon\leqslant 0$

$\Rightarrow m^{2}-8\leqslant 0$.

故正奇数 $m=1$，式①不成立.

当 $\varepsilon=-1$ 时，注意到 $x\geqslant 3$，故

$1+m=2^{x-2}(m^{2}-8)\geqslant 2(m^{2}-8)$,

即 $2m^{2}-m-17\leqslant 0$.

故 $m\leqslant 3$.

此时，只有正奇数 $m=3$ 使得式①成立.

从而，$x=4$，$y=23$.

综上，所有正整数对

$(x,y)=(0,2),(0,-2),(4,23),(4,-23)$.

## 4 运用二项式定理

**例6** 求所有有序的三元正整数组$(a,b,c)$，使得$|2^{a}-b^{c}|=1$.

(2009，克罗地亚参加中欧数学奥林匹克选拔测试)

**讲解** 若 $c=1$，则 $2^{a}-b=\pm 1$.

故 $b=2^{a}\pm 1$.

此时，$(a,b,c)=(k,2^{k}\pm 1,1)$，其中，$k$ 是任意的正整数.

若 $c>1$，则对 $b^{c}=2^{a}\pm 1$ 分类讨论.

(1)若 $b^{c}=2^{a}+1$，则 $b$ 是奇数.

设 $b=2^{k}u+1$($2\nmid u$，且 $k\in\mathbf{N}_{+}$). 则

$(2^{k}u+1)^{c}=2^{a}+1$.

显然，$k<a$，即 $a\geqslant k+1$.

结合二项式定理得

$2^{k}uc\equiv 2^{a}\equiv 0\pmod{2^{k+1}}$.

故 $2\mid c$.

设 $c=2c_{1}$. 则

$(b^{c_{1}}+1)(b^{c_{1}}-1)=2^{a}$.

故 $b^{c_{1}}+1$、$b^{c_{1}}-1$ 都是2的方幂.

而$(b^{c_{1}}+1)-(b^{c_{1}}-1)=2$，故

$b^{c_{1}}+1=4$

$\Rightarrow b=3,c_{1}=1$

$\Rightarrow c=2,a=3$

$\Rightarrow(a,b,c)=(3,3,2)$.

(2)若 $b^{c}=2^{a}-1$，则当 $b=1$ 时，$a=1$.

此时，$(a,b,c)=(1,1,k)$，其中，$k$ 是任意的正整数.

当 $b>1$ 时，有 $a>1$.

设 $b=2^{k}u+1$($2\nmid u$ 且 $k\in\mathbf{N}_{+}$). 则

$(2^{k}u+1)^{c}=2^{a}-1$.

显然，$k<a$，则 $1\equiv -1\pmod{2^{k}}$，即 $2^{k}\mid 2$.

故 $k=1$.

因此，$(2u+1)^{c}=2^{a}-1$.

而 $a>1$，结合二项式定理得

$2uc+1\equiv -1\pmod 4$,

即 $4\mid 2(uc+1)$.

因此，$2 \nmid c$.

设 $c=2c_1+1$. 则 $b^{2c_1+1}+1=2^a$.

由因式定理得

$(b+1) \mid (b^{2c_1+1}+1)$.

可设 $b+1=2^v$. 则 $v<a$，即

$a \geqslant v+1$，且 $(2^v-1)^{2c_1+1}+1=2^a$.

结合二项式定理得

$(2c_1+1)2^v \equiv 2^a \equiv 0 \pmod{2^{v+1}}$.

但这不可能.

综上，满足要求的

$(a,b,c)=(3,3,2),(1,1,k),(k,2^k \pm 1,1)$，其中，$k$ 是任意的正整数.

## 练习题

**1.** 已知 $3^a+7^b$ 为完全平方数. 求所有的有序整数对 $(a,b)$.

(2009，加拿大数学奥林匹克)

提示：利用同余分析、质因子分析，进行分类讨论得 $(a,b)=(1,0),(2,1)$.

**2.** 求所有三元正整数组 $(a,b,c)$，使得 $a^2+2^{b+1}=3^c$.[3]

(2008，意大利数学奥林匹克)

提示：利用同余分析、质因子分析，得 $(a,b,c)=(1,2,2),(7,4,4)$.

**3.** 求方程 $3^x+4^y=5^z$ 的所有正整数解.

提示：利用同余分析、质因子分析，进行分类讨论得 $(x,y,z)=(2,2,2)$.

**4.** 求使 $2^m+3^n$ 为完全平方数的所有正整数 $m$、$n$.

提示：利用同余分析、质因子分析，得 $(m,n)=(4,2)$.

**5.** 求证：$8^x+15^y=17^z$ 的正整数解 $(x,y,z)$ 唯一.

提示：利用同余分析、质因子分析，得唯一正整数解 $(x,y,z)=(2,2,2)$.

**参考文献：**


[1] 2008 克罗地亚数学竞赛[J]. 李涛 译. 中等数学，2009(增刊).

[2] 第 47 届 IMO 试题解答[J]. 中等数学，2006(9).

[3] 2008 意大利数学奥林匹克[J]. 李建泉 译. 中等数学，2009(增刊).