第 23 届香港数学奥林匹克

题 1

现有一个方格表, 共有 n 行 18 列, 每个方格内装有 0 或 1 其中一个数, 这个方格表满足以下条件:

(i) 任何两行都是不同的.

(ii) 每行都恰好有 6 个方格装有 1.

(iii) 对于任何三行, 都存在一列使得这列与三行的相交 (该三个方格) 全部装有 0.

那么 n 最大可能值是什么?

题 2

对于每个大于 1 的正整数 n, 设 $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 是它的质因数连乘式, 则我们定义它的“记号”为 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k$. 是否存在 2020 个连续正整数, 使得它们当中恰好有 1812 个整数的记号小于 11?

题 3

设 $ABCD$ 是圆内接四边形, 其外接圆为 Γ, 且 $AB=AD$, 设 E 是线段 CD 上一点, 使得 $BC=DE$. 直线 AE 与 Γ 再次相交于 F, 弦 AC 和 BF 相交于 M, 并设 P 是 C 沿 M 反射后所得的点. 求证: PE 和 BF 互相平行.

题 4

设 a, b 和 c 为正实数, 满足 $abc=1$. 求证:

$$\frac{1}{a^3+2b^2+2b+4}+\frac{1}{b^3+2c^2+2c+4}+\frac{1}{c^3+2a^2+2a+4}\leqslant\frac{1}{3}.$$