命题解题

征解题 20260320

问题由 FMBS 数竞教练团队余智水老师提供.

问题

如图 1, Rt$\triangle ABC$ 中, $\angle B=90^\circ$, D 是 AB 边上一点, $AD=2BC$, 且 $\angle ACD=45^\circ$. 求 $\angle A$.

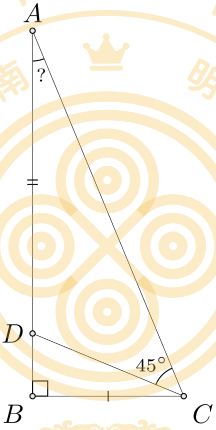

图 1

图南少培征解 欢迎提交解答

解析

解法 1: (费振鹏) 结合基本形, 构造全等三角形.

如图 2, 过 A 作 $AE \perp CD$ 于 E, AE 与 CB 交于 F, 则 $AE = CE$. 又 $\angle EAD = \angle ECF$, 故

$$\mathrm{Rt}\triangle ADE \cong \mathrm{Rt}\triangle CFE.$$

所以 $AD = CF = 2BC$. 从而 $BF = BC$.

又 $AB \perp FC$, 故 $AF = AC$. 因此

$$\angle BAC = \frac{1}{2}\angle CAE = \frac{45^\circ}{2} = 22.5^\circ. \qquad \square$$

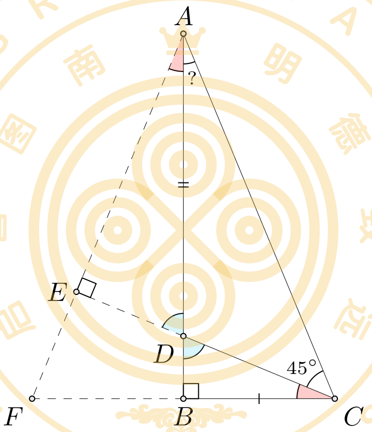

图 2

解法 2: (君成) 相似, 勾股定理.

如图 3.

作 $AE \perp CD$ 交 CD 延长线于 E, 则

$$AE = CE,\ \triangle AED \backsim \triangle CBD.$$

设 $DE = x$, $AE = y$, 则 $BD = \dfrac{x}{y}$, $CD = \dfrac{2}{y}$.

不妨设 $AD = 2$, $BC = 1$, 则

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, & ① \\ x + \dfrac{2}{y} = y. & ② \end{cases}$$

由 ② $\times 2y$ 得, $2xy + 4 = 2y^2$. 将 ① 代入得

$$(x+y)^2 = 2y^2.$$

$$x + y = \sqrt{2}y.$$

$$\frac{y}{x} = \sqrt{2} + 1.$$

代入 ② $\div x$ 得

$$1 + \frac{2}{yx} = \sqrt{2} + 1 \iff \frac{DC}{ED} = \frac{2}{yx} = \sqrt{2} = \frac{AC}{AE}.$$

所以 AD 为 $\angle EAC$ 的平分线.

因此 $\angle BAC = \dfrac{45^\circ}{2} = 22.5^\circ$. $\square$

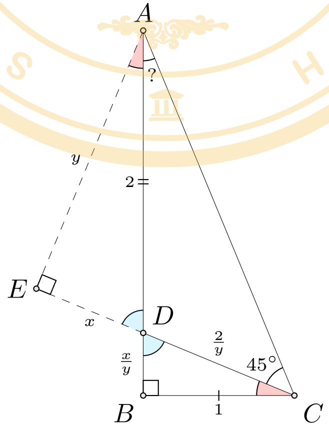

图 3

解法 3: (孔令仪) 等腰直角三角形, 四点共圆.

如图 4, 过 D 作 $DE \mathrel{\underline{\parallel}} BC$, 则由 $\angle DBC = 90^\circ$ 可知 $BCED$ 为矩形, $\angle DEC = 90^\circ$.

取 AD 的中点 M, 连 ME 交 AC 于 F, 连 DF.

因为 $\angle MDE = 90^\circ$, $DM = \dfrac{1}{2}AD = BC = DE$, 所以 $\triangle MDE$ 是等腰直角三角形.

故 $\angle DEF = \angle DEM = 45^\circ = \angle ACD = \angle DCF$. 因此 C、D、F、E 四点共圆.

进而有 $\angle DFC = \angle DEC = 90^\circ$, $\angle AFD = 90^\circ$.

从而由斜边中线定理可得 $MF = MA$. 所以 $\angle A = \angle MFA = \dfrac{1}{2}\angle DMF = \dfrac{1}{2}\angle DME = \dfrac{45^\circ}{2} = 22.5^\circ$. □

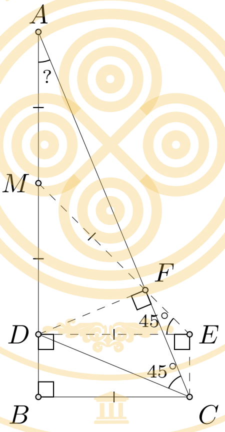

图 4

解法 4: (费振鹏) 分角定理 (面积法).

如图 5. 不妨设 $AD=2$, $BC=1$, $BD=x$.

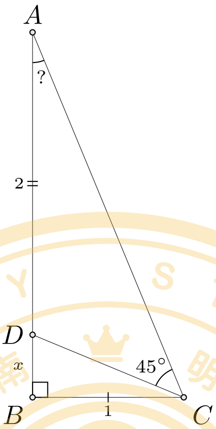

图 5

由 $\dfrac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle BCD}}=\dfrac{AD}{BD}$, 得

$$\frac{AC^2\sin^2\angle ACD}{BC^2\sin^2\angle BCD}=\frac{AD^2}{BD^2}.$$

$$\frac{\left(x^2+4x+5\right)\cdot\frac{1}{2}}{\frac{x^2}{x^2+1}}=\frac{4}{x^2}.$$

$$\left(x^2+1\right)\left(x^2+4x+5\right)=8.$$

$$(x+1)^4=4.$$

而 $x+1>0$, 故 $x+1=\sqrt[4]{4}=\sqrt{2}$. 从而 $x=\sqrt{2}-1$.

所以 $\dfrac{BD}{BC}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{1}=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\dfrac{BC}{AB}$.

即 $\tan\angle BCD=\tan\angle BAC$. 故

$$\angle BAC=\angle BCD=\frac{45^\circ}{2}=22.5^\circ. \qquad \square$$

解法 5: (费振鹏) 正切的和角公式.

如图 6. 不妨设 $AD=2,\ BC=1,\ BD=x$.

对 $\angle BDC=\angle A+\angle ACD$ 两边取正切, 得

$$\frac{1}{x}=\frac{\frac{1}{x+2}+1}{1-\frac{1}{x+2}}.$$

$$\frac{1}{x}=\frac{x+3}{x+1}.$$

$$(x+1)^2=2.$$

$$x=\sqrt{2}-1\,(负值已舍去)\,.$$

后同, 这里略去. □

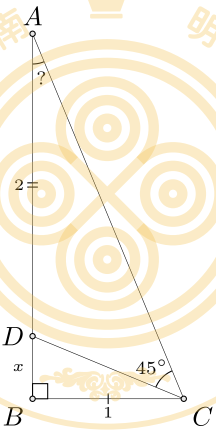

图 6

解法 6: (颜芷媛) 正切的和角公式.

如图 7.

设 $BC=x$, $BD=y$, $\angle A=\alpha$, $\angle DCB=\beta$, 则

$$\alpha+\beta=45^\circ.$$

$$\tan\alpha=\frac{x}{2x+y},\ \tan\beta=\frac{y}{x}.$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}.$$

所以 $x^2-2xy-y^2=0\,(x>y)$. 故 $x-y=\sqrt{2}y$.

$$\tan\beta=\frac{y}{x}=\sqrt{2}-1.$$

$$\frac{1}{\tan\alpha}=2+\frac{y}{x}=1+\sqrt{2}\implies\tan\alpha=\sqrt{2}-1.$$

所以 $\alpha=\beta\implies\alpha=\beta=22.5^\circ$. □

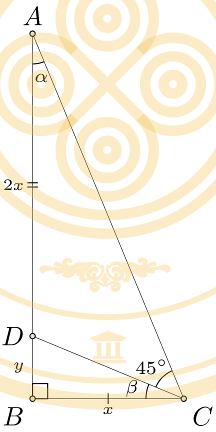

图 7

解法 7: (颜芷媛) 正弦定理, 积化和差.

如图 8.

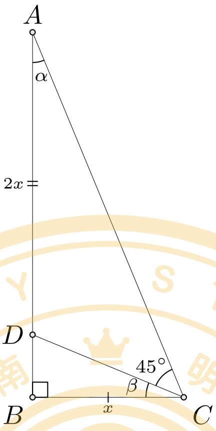

图 8

设 $BC = x$, $\angle A = \alpha$, $\angle DCB = \beta$.

在 $\triangle ACD$ 中, 由正弦定理, 得

$$\frac{2x}{\sin 45^\circ} = \frac{DC}{\sin\alpha} = \frac{\frac{x}{\cos\beta}}{\cos(\beta + 45^\circ)}.$$

$$2\cos\beta\cos(\beta + 45^\circ) = \sin 45^\circ.$$

$$\cos(2\beta + 45^\circ) + \cos 45^\circ = \sin 45^\circ.$$

$$\cos(2\beta + 45^\circ) = 0.$$

$$2\beta + 45^\circ = 90^\circ.$$

$$\beta = 22.5^\circ.$$

所以 $\alpha = 45^\circ - 22.5^\circ = 22.5^\circ$. $\square$