風學數

命题解题

交流题 20260324

微信群“图南少培”交流问题.

问题

如图 1, 在 $\triangle BCE$ 中, A、D 分别为边 BE、CE 上的点. 若 $AB=2$, $CD=3$, $\angle ABC=\angle ADC$, 设 $AE=m$, $DE=n$, 则 AC 的长为 ________(结果用含 m, n 的代数式表示).

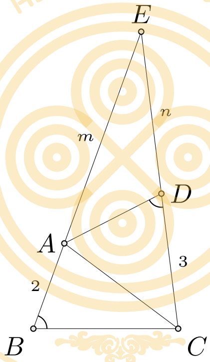

图 1

图南少培 欢迎交流

群聊: 图南少培

该二维码7天内(3月27日前)有效，重新进入将更新

解析

解法 1: 如图 2. 设 $\triangle EBC$ 的外接圆与 AC 的另一个交点为 F. 则 $\angle CFE = \angle ABC = \angle ADC$. 故 A、D、E、F 四点共圆.

设 $AC = x$, $AF = y$, 由圆幂定理, 得

$$xy = 2m,$$

$$x(x+y) = 3(n+3).$$

两式作差, 得 $x^2 = 3n - 2m + 9$. 从而

$$AC = x = \sqrt{3n - 2m + 9}. \qquad \square$$

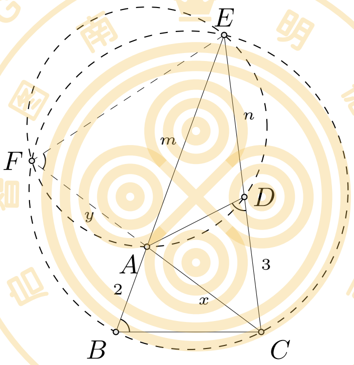

图 2

解法 2: 如图 3, 在 CE 上取点 F, 使得 $\angle AFE=\angle ADC=\angle ABC$. 则 A、B、C、F 四点共圆.

设 $DF=x$, $AC=y$.

作 $AG\perp DF$ 于 G, 则 $DG=FG=\dfrac{x}{2}$.

由割线定理, 得 $EA\cdot EB=EF\cdot EC$. 即

$$m(m+2)=(n+3)(n+x).$$

$$(n+3)x=m^2+2m-n^2-3n.$$

由等差幂线定理, 得 $AC^2-AE^2=GC^2-GE^2$. 即

$$y^2-m^2=\left(3-\frac{x}{2}\right)^2-\left(n+\frac{x}{2}\right)^2.$$

$$y^2=m^2+9-n^2-(n+3)x.$$

$$y^2=m^2+9-n^2-\left(m^2+2m-n^2-3n\right).$$

$$y^2=3n-2m+9.$$

$$y=\sqrt{3n-2m+9}.$$

当 $\angle ABC$ 是直角或钝角时, 类似地, 所得结果相同.

综上, $AC=\sqrt{3n-2m+9}$. □

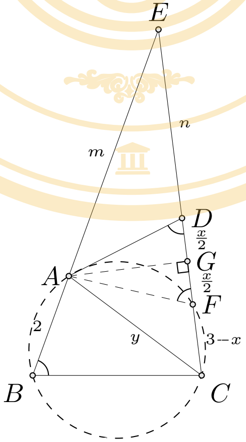

图 3