图南少年数学人才搜索

费振鹏

2026 年 5 月 30 日

目　　录

第 1 届图南少年数学人才搜索

校名: ______ 省 ______ 年级: ______ 姓名: ______

考前说明

考试时间: 2026 年 3 月 29 日 9:00-10:00. 试卷共 4 道试题, 每题 25 分, 满分 100 分.

题 1.1

偶数 x、y、z 满足不等式 $x^2+2y^2+z^2+58<4x+yz+14z$. 求 $x+y^z$ 的值.

题 1.2

如图 1.1, 四边形 $ABCD$ 中, $\angle ABD=\angle ACB=\angle ADB=75^\circ$, $AC=7$, $BC=2$. 求 CD.

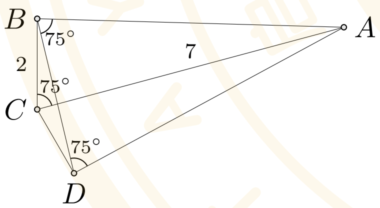

图 1.1

题 1.3

求十进制数 $47^{37^{27}}$ 化为七进制后的末两位数字.

题 1.4

将 $1, 2, \cdots, 17$ 按某一顺序排成一行, 使得任意相邻 4 个数的和都不大于 n. 求能够排成时 n 的最小值.

第 2 届图南少年数学人才搜索

校名：________省________________　年级：____________　姓名：____________

考前说明

考试时间：2026 年 4 月 5 日 9:00-10:00. 试卷共 4 道试题，每题 25 分，满分 100 分.

题 2.1

已知三次多项式 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，且当 $x=1,2,3,4$ 时，$f(x)$ 的值分别为 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{11}$，求 $a+d$ 的值.

题 2.2

$\triangle ABC$ 中，$BC=28$, $AC=45$, $AB=53$, P 在边 AB 上，Q 是 CP 与 $\triangle ABC$ 的外接圆的另一交点. 求证：$PQ<\frac{2809}{12\sqrt{70}}$.

题 2.3

求最小的正整数 k, 使得 $8^k \equiv 1 \pmod{81}$.

题 2.4

正 19 边形的每个顶点用红、黄、蓝三色之一染色. 由三个同色顶点确定的三角形称为同色三角形. 证明: 无论怎么染色, 由这 19 个顶点可以确定两个同色三角形, 这两个三角形全等, 而且顶点的颜色全相同.

第 3 届图南少年数学人才搜索

校名: ________省________________ 年级: ____________ 姓名: ____________

考前说明

考试时间: 2026 年 4 月 12 日 9:00-10:40. 试卷共 4 道试题, 每题 25 分, 满分 100 分.

题 3.1

整数 a,b,c 满足不等式

$$a^2+2b^2+c^2+17<ab+7b+7c.$$

求所有这样的有序整数组 (a,b,c).

题 3.2

如图 3.1, $\triangle ABC$ 中, $AB=AC=2BC$, I 是其内心, E 是内切圆 $\odot I$ 与边 AC 的切点, BE 与 $\odot I$ 的另一交点为 P. 求证: A、B、P、I 四点共圆.

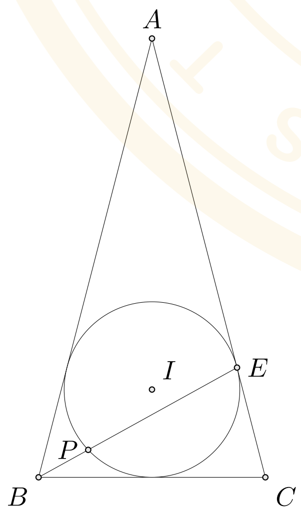

图 3.1

题 3.3

已知 x, y 是正整数, 质数 $p > x$. 求证: 存在正整数 n, 使得 $p \mid x^n - n^y$.

题 3.4

如图 3.2, 平面上网格 11×11, 将每个格点任意染上红、黄、蓝三色之一.
求证: 总存在一个由图中网格线围成的矩形, 其 4 个顶点为同色格点.

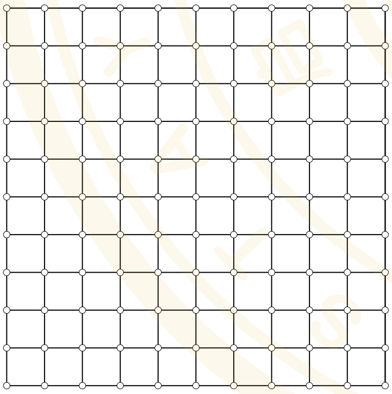

图 3.2

第 4 届图南少年数学人才搜索

校名: ________省________ 年级: ________ 姓名: ________

考前说明

考试时间: 2026 年 4 月 19 日 9:00-10:40. 试卷共 4 道试题, 每题 25 分, 满分 100 分.

题 4.1

求所有三元正整数组 (p,q,n), 其中 p 和 q 为素数, 且满足

$$20p+26q=n^2+48.$$

题 4.2

如图 4.1, $\triangle ABC$ 满足 $AB<AC$, 外接圆为 Ω, 外心为 O, 内心为 I. 不含 A 的 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点为 M. 直线 OI 交 Ω 于 E 和 F, 直线 BC 交 ME、MF 分别于 K、L. 已知 $IA=IM$. 求证: $IKML$ 是矩形.

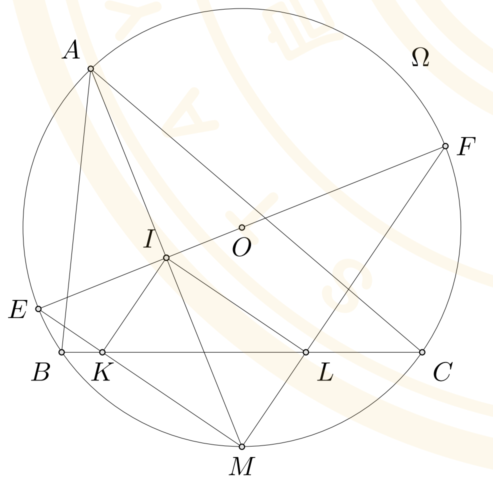

图 4.1

题 4.3

求最大的正整数 n, 使得存在 $i \in \{0,1,2,\cdots,2026\}$, 满足

$$(n+i)^2 \mid n(n+1)(n+2)\cdots(n+2026).$$

题 4.4

将正 2026 边形的所有顶点, 一半染成红色, 一半染成蓝色. 若一条直线经过其中的一个红点和一个蓝点, 并且在该直线的每一侧, 红点数与蓝点数相同, 则称此直线为靓线. 求证: 过每个顶点至少有一条靓线, 并求图中靓线条数的最值.

第 5 届图南少年数学人才搜索

校名: ________省________ 年级: ________ 姓名: ________

考前说明

考试时间: 2026 年 4 月 26 日 9:00-10:40. 试卷共 4 道试题, 每题 25 分, 满分 100 分.

题 5.1

任意锐角三角形 ABC, 能否判断 $\tan A+\tan B+\tan C$ 与 $\cot A+\cot B+\cot C$ 的大小? 若能, 请证明你的结论; 若不能, 请说明理由.

题 5.2

如图 5.1, P 为锐角 $\triangle ABC$ 的 BC 上固定一点, D 是 AP 上靠近 P 的三等分点, E 是形内满足 $EA=ED$ 的一动点, 过 E 作 BC 的垂线交 BC 于 F. 求证: 存在 $\triangle ABC$ 内的定点 G, 满足 $\angle ADE=\angle EFG$.

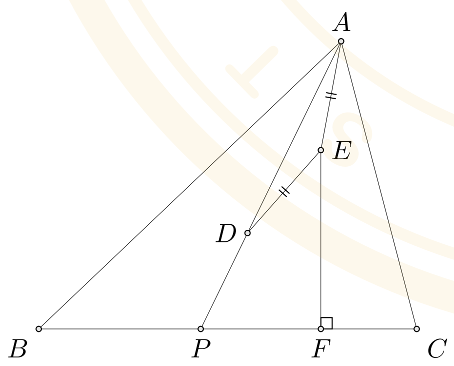

图 5.1

题 5.3

若 $N=\underbrace{20262026\cdots2026}_{x\text{ 个 }2026}$ 能被 999 整除, 求 x 的最小值.

题 5.4

在正方体的每个顶点上记上一个互异正整数, 在其每条棱上记上其两端点上的数的最大公约数. 问是否有可能使顶点上的数之和等于棱上数之和?

第 6 届图南少年数学人才搜索

校名: ________ 省 ________ 年级: ________ 姓名: ________

考前说明

考试时间: 2026 年 5 月 3 日 9:00-10:40. 试卷共 4 道试题, 每题 25 分, 满分 100 分.

题 6.1

已知抛物线 $y=\frac{10}{11}x^2+9x+29$.

(1) 求证: 存在此抛物线对称轴上的一个定点 F 与平行于 x 轴的定直线 l, 使得此抛物线上任一点到点 F 的距离与到直线 l 的距离相等, 并求点 F 与直线 l;

(2) 已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点 A、B、C 在此抛物线上, 且点 F 是其重心, 求 $FA+FB+FC$ 的值.

题 6.2

如图 6.1, $BC=2$, A 为半径为 1 的 $\odot B$ 上一点, 连 AC, 在 AC 上方作一个正六边形 $ACDEFG$, 连 BD, 求 BD 的最大值.

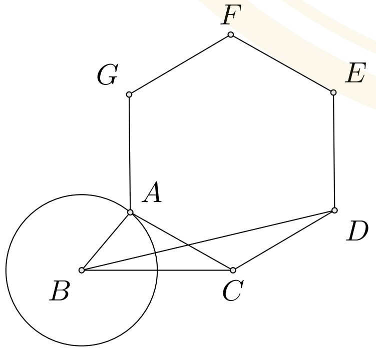

图 6.1

题 6.3

证明: 存在 2026 个连续的正整数, 它们分别能被某个大于 1 的整数的三次方整除.

题 6.4

现将平面上点 A 染成红色, 且这个平面上任意两个相距 2026 的点都被染成同色. 求证: 平面上所有的点都被染成红色.

第 7 届图南少年数学人才搜索

校名：＿＿＿省＿＿＿ 年级：＿＿＿＿ 姓名：＿＿＿＿

考前说明

考试时间：2026 年 5 月 10 日 9:00-10:40. 试卷共 4 道试题，每题 25 分，满分 100 分.

题 7.1

已知过点 $A(-20, 15)$ 和 $B(6, 30)$ 的抛物线 $y = ax^2 + bx + c$, 对于任意非零的实数 a 恒不过点 $P\left(x_0 + 5, x_0^2 + 29\right)$, 求点 P 的坐标.

题 7.2

如图 7.1, 设 O 是锐角三角形 ABC 的外心. 在边 AB 和 AC 上分别取点 K 和 L, 使得 $OK = BK$ 且 $OL = CL$. 三角形 ABC 与 AKL 的外接圆再次交于点 T. 证明: $AT \mathbin{/\!/} BC$.

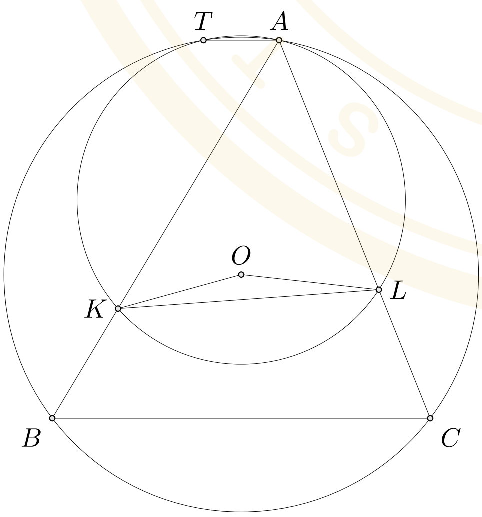

图 7.1

题 7.3

求所有的正整数 x, y, 使得对满足 $x^n - n^y \neq 0$ 的任意正整数 n, 有 $x^n - n^y \mid 25^n - n^{26}$.

题 7.4

给定 13 个大于 1 的正整数中至少有 27 对是互素的. 求证: 其中必存在四个整数 a, b, c, d, 满足 $\gcd(a, b) = \gcd(b, c) = \gcd(c, d) = \gcd(d, a) = 1$.

第 8 届图南少年数学人才搜索

校名: ______省______ 年级: ________ 姓名: ________

考前说明

考试时间: 2026 年 5 月 17 日 9:00-10:40. 试卷共 4 道试题, 每题 25 分, 满分 100 分.

题 8.1

已知 x, y 为任意实数, 求 $|11x+3y|$, $|9-22y|$, $|11x-3y|$ 三个数中最大数的最小值.

题 8.2

如图 8.1, AB 为半圆的直径, C 为 $\overset{\frown}{AB}$ 上一点, $CD \perp AB$ 于 D, 弦 $CE = CF = CD$, EF 交 CD 于 G. 连 AC、BC 分别交 EF 于 H、I. 求证: 四边形 $CHDI$ 是矩形, 且 $CG = DG$.

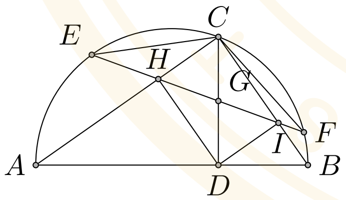

图 8.1

题 8.3

求所有使 $2^{10}+2^{16}+2^n$ 为完全平方数的正整数 n.

题 8.4

已知 $M=\{1,2,\cdots,2026\}$. f 是元素和模 64 余 1 的 M 的子集的个数, s 是元素和模 16 余 4 的 M 的子集的个数. 求证: $s=4f$.

第 9 届图南少年数学人才搜索

校名: ______省______ 年级: ______ 姓名: ______

考前说明

考试时间: 2026 年 5 月 24 日 9:00-10:40. 试卷共 4 道试题, 每题 25 分, 满分 100 分.

题 9.1

设 n 为正整数, 非负整数 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 满足 $x_0 + x_1 + \cdots + x_n = n$. 求证:

$$S = 2^0 x_0 + 2^1 x_1 + \cdots + 2^n x_n$$

的最小可能值为 n, 并求此时 $(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ 的所有解.

题 9.2

如图 9.1, $ABCD$ 是圆内接四边形, 满足 $AC < BD < AD$ 且 $\angle DBA < 90°$. 点 E 位于过点 D 且平行于 AB 的直线上, 使得 E 与 C 在直线 AD 的异侧, 并且 $AC = DE$. 点 F 位于过点 A 且平行于 CD 的直线上, 使得 F 与 C 在直线 AD 的异侧, 并且 $BD = AF$.

证明: 线段 BC 和 EF 的垂直平分线相交于四边形 $ABCD$ 的外接圆上.

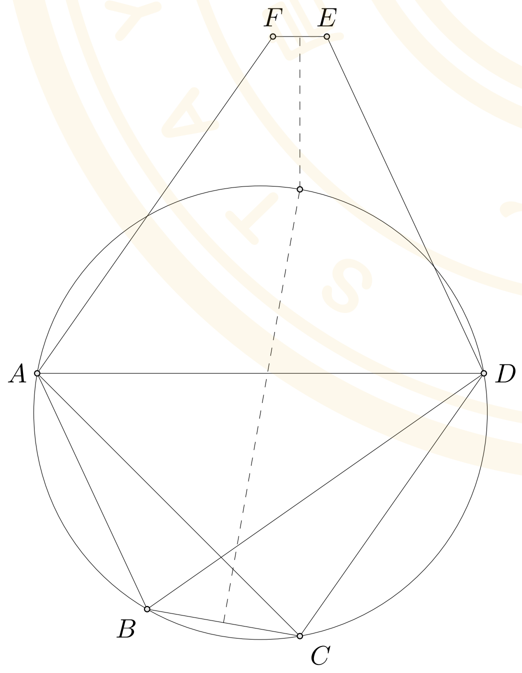

图 9.1

题 9.3

设 $p \neq q$, 且均为 $4k+1$ 型素数, 证明: 存在无穷多个正偶数 n, 使得

$$p \mid (n^2+1), \qquad q \mid (n^2+1).$$

题 9.4

盒子里有 2000 个白球, 另有足够数量的绿球、红球及更多的白球可用. 在盒子里可作如下操作:

(1) 用 1 个绿球与 2 个白球互换;
(2) 用 1 个绿球与 2 个红球互换;
(3) 用 1 个白球、1 个红球与 2 个绿球互换;
(4) 用 1 个红球与 1 个白球、1 个绿球互换;
(5) 用 1 个白球与 1 个绿球、1 个红球互换.

请完成下面两个问题:

(a) 求证: 经有限次操作后, 盒子里可以还剩 3 个球, 并且其中必有 1 个是绿球.
(b) 经有限次操作后, 盒子里是否可能还剩 1 个球?

第 10 届图南少年数学人才搜索

校名: ____省____________ 年级: ____________ 姓名: ____________

考前说明

考试时间: 2026 年 5 月 31 日 9:00-10:40. 试卷共 4 道试题, 每题 25 分, 满分 100 分.

题 10.1

已知 $\dfrac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\dfrac{5}{31}$, 求 $\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{b+c}+\dfrac{c}{c+a}$ 的值.

题 10.2

作图 (写出作法, 保留清晰的作图痕迹, 但不用写出证明过程).
已知: 如图 10.1, $\odot O$ 及直线 l 上一点 A. 求作: 一圆与 $\odot O$ 及 l 都相切, 且切点为 A.

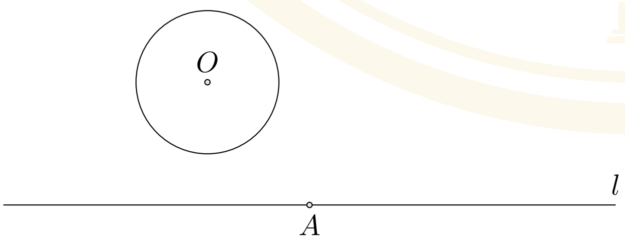

图 10.1

题 10.3

求所有具有以下性质的正整数 n: 对于 n 的所有正因数 d, 都有 $d+1 \mid n$ 或 $d+1$ 是素数.

题 10.4

求证: 任意用红、黄、蓝三种颜色对平面上的点染色, 必存在三个三角形, 它们彼此相似, 其相似比为 $2026:5:31$, 且每个三角形的三顶点同色.