



2023 年上海市高三数学竞赛试卷

www.omaths.com

2023 年 3 月 26 日上午 9:30 ~ 11:30

一、填空题 (本大题满分 60 分, 前 4 小题每小题 7 分, 后 4 小题每小题 8 分)

题 1.1

若不等式 $\log_a x > \tan x$ ($a > 0, a \neq 1$) 对任意 $x \in (0, \frac{\pi}{4})$ 均成立, 则实数 a 的取值范围是 _____.

题 1.2

将一枚硬币和一个骰子同时投掷, 硬币出现正面记为 2, 出现反面记为 1, 此数与骰子的点数之积记为 x (例如硬币出现正面, 骰子点数为 3, 则 $x = 2 \times 3 = 6$), 那么 x 的数学期望是 _____.

题 1.3

已知长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = BC = 4, AA_1 = 2, P$ 是平面 A_1BC 上一动点, 且 $\overrightarrow{DP} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$, 则满足上述条件的所有的点 P 所围成的平面区域的面积等于 _____.

题 1.4

在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 $y = x^3 - ax$ 有两条互相平行的切线, 若这两条切线的斜率均为 1, 且两条切线之间的距离为 8, 则实数 a 的值为 _____.

题 1.5

正整数 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 构成一个严格增的等比数列, 且满足 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 211$, 则 $a_1 =$ _____, 公比 $q =$ _____.

题 1.6

已知曲线 Γ 的方程是 $x|x| + y|y| = 1$. 若过点 $A(1, 0)$ 的直线 l 与曲线 Γ 恰有三个不同的交点, 则直线 l 的倾斜角的取值范围是 _____.

题 1.7

给定正实数 k , 对任意正实数 a, b , 记 $m = \min \left\{ a, \frac{b}{ka^2 + b^2} \right\}$, 则 m 的最大值为 _____.
(注: $\min \{x, y\}$ 表示实数 x, y 中的较小者.)

题 1.8

十进制六位数 $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ 中, 每个数码 a_i ($1 \leq i \leq 6$) 都是奇数, 且其中出现的数码 1 不允许相邻 (例如, 135131, 577797 满足条件, 而 311533 不满足条件), 则这种六位数的个数是 _____.



二、解答题 (本大题满分 60 分, 每小题 15 分)

题 1.9

已知抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 与双曲线 $y = -\frac{1}{x}$ 相交于点 R , 抛物线与双曲线的公切线分别与抛物线、双曲线相切于点 S, T . 求证: 对于任意正实数 p , $\triangle RST$ 的面积为与 p 无关的常数, 并求该常数.

题 1.10

设集合 $M = \{1, 2, \dots, 2023\}$, 对 M 的子集 $A = \{a_1, \dots, a_k\}$, 令它对应一个数 $\alpha = (-1)^{a_1 + \dots + a_k}$ (空集 \emptyset 对应的数 $\alpha = (-1)^0 = 1$). 对 M 的所有子集 A , 求它们对应的数的总和 $\sum_{A \subseteq M} \alpha$.

题 1.11

给定 $\text{Rt}\triangle ABC$, 其中 $\angle ACB = 90^\circ$, $BC = a$, $CA = b$. 点 D, E, F 分别在边 BC, CA, AB 上, 使得 $\triangle DEF$ 是正三角形, 求 $\triangle DEF$ 面积的最小值.

题 1.12

设 t 为大于 3 的正整数. 求 t 的最小值, 使得存在两个正整数 m, n , 满足: m, n 都恰有 t 个正约数, 且若将 m 的正约数从小到大排列为 c_1, c_2, \dots, c_t (其中 $c_1 = 1, c_t = m$), 将 n 的正约数从小到大排列为 d_1, d_2, \dots, d_t (其中 $d_1 = 1, d_t = n$), 则存在一个整数 r ($2 \leq r \leq t-2$), 使得

$$(-1)^i (c_i - d_i) \begin{cases} > 0, & i = 2, \dots, r, \\ < 0, & i = r+1, \dots, t. \end{cases}$$