伴切比雪夫多项式

华南师范大学 吴 康

§ 1. 切比雪夫多项式 [1]

概要

由余弦多倍角展开式

$$\cos(0\theta)=1,\cos\theta,\cos(2\theta)=2\cos^2\theta-1,\cos(3\theta)=4\cos^3\theta-3\cos\theta,\cdots \tag{1}$$

导出的 (第一类) 切比雪夫多项式序列 $\{T_n(x)\}$ 为

$$\begin{gathered}T_0(x)=1,T_1(x)=x,T_2(x)=2x^2-1,T_3(x)=4x^3-3x,\\T_4(x)=8x^4-8x^2+1,T_5(x)=16x^5-20x^3+5x,\\T_6(x)=32x^6-48x^4+18x^2-1,T_7(x)=64x^7-112x^5+56x^3-7x,\\T_8(x)=128x^8-256x^6+160x^4-32x^2+1,T_9(x)=256x^9-576x^7+432x^5-120x^3+9x,\\T_{10}(x)=512x^{10}-1280x^8+1120x^6-400x^4+50x^2-1,\\T_{11}(x)=1024x^{11}-2816x^9+2816x^7-1232x^5+220x^3-11x,\\T_{12}(x)=2048x^{12}-6144x^{10}+6912x^8-3584x^6+840x^4-72x^2+1,\\T_{13}(x)=4096x^{13}-13312x^{11}+16640x^9-9984x^7+2912x^5-364x^3+13x,\cdots\end{gathered} \tag{2}$$

$\{T_n(x)\}$ 满足递推关系式:

$$T_{n+2}(x)=2xT_{n+1}(x)-T_n(x),x\in\mathbb{C},n\in\mathbb{N}. \tag{3}$$

$\{T_n(x)\}$ 最重要的性质:

$$T_n(\cos\theta)=\cos(n\theta),\theta\in\mathbb{R},n\in\mathbb{N}. \tag{4}$$

$\{T_n(x)\}$ 有许多美妙的性质, 应用非常广泛, $\{T_n(x)\}$ 是极为重要的多项式序列之一.

§ 2. 伴切比雪夫多项式

概要

切比雪夫多项式的系数不够简洁. 笔者尝试定义“伴切比雪夫多项式”, 希望获得认可.

定义

由

$$B_n(x)=2T_n\left(\frac{x}{2}\right),n\in\mathbb{N} \tag{1}$$

定义的多项式 $B_n(x)$, 称为伴切比雪夫多项式.

概要

伴切比雪夫多项式序列 $\{B_n(x)\}$ 为

$$\begin{gathered}B_0(x)=2,B_1(x)=x,B_2(x)=x^2-2,B_3(x)=x^3-3x,B_4(x)=x^4-4x^2+2,\\B_5(x)=x^5-5x^3+5x,B_6(x)=x^6-6x^4+9x^2-2,B_7(x)=x^7-7x^5+14x^3-7x,\\B_8(x)=x^8-8x^6+20x^4-16x^2+2,B_9(x)=x^9-9x^7+27x^5-30x^3+9x,\\B_{10}(x)=x^{10}-10x^8+35x^6-50x^4+25x^2-2,B_{11}(x)=x^{11}-11x^9+44x^7-77x^5+55x^3-11x,\\B_{12}(x)=x^{12}-12x^{10}+54x^8-112x^6+105x^4-36x^2+2,\\B_{13}(x)=x^{13}-13x^{11}+65x^9-156x^7+182x^5-91x^3+13x,\cdots\end{gathered} \tag{2}$$

易见伴切比雪夫多项式的系数较为简洁, 也有许多类似于切比雪夫多项式的美妙性质: [1]

1° $B_n(2\cos\theta)=2\cos(n\theta), \theta\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}.$ (3)

2° $B_n(-x)=(-1)^n B_n(x), x\in\mathbb{C}, n\in\mathbb{N}.$ (4)

这表明 $B_n(x)$ 当 n 为奇 (偶) 数时是奇 (偶) 函数.

3° $B_n(2)=2, B_n(-2)=2(-1)^n, n\in\mathbb{N}.$ (5)

4° $B_{2m+1}(0)=0, B_{2m}(0)=2(-1)^m, m\in\mathbb{N}.$ (6)

5° $|B_n(x)|\leqslant 2, x\in\mathbb{R}, |x|\leqslant 2.$ (7)

6° $B_{n+2}(x)=xB_{n+1}(x)-B_n(x), x\in\mathbb{C}, n\in\mathbb{N}.$ (8)

7° $B_n(x)$ 的全部 n 个复根均为绝对值不大于 2 的互异实数 :

$$x_k=2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}, k=0,1,\cdots,n-1, \quad n\in\mathbb{N}^+. \tag{9}$$

8° $B_n(x)$ 的系数全为整数, 且可表示为

$$B_{2m}(x)=\sum_{j=0}^{m} b_j x^{2m-2j}, B_{2m+1}(x)=\sum_{j=0}^{m} b_j x^{2m+1-2j}, m\in\mathbb{N}, \tag{10}$$

其中 $b_0=1, b_1=-n, b_0, b_1, \cdots, b_m$ 正负交替, 且

$$b_m=2\cdot(-1)^m\,(n\text{ 为偶数})\text{ 或 }(-1)^m\cdot n\,(n\text{ 为奇数}). \tag{11}$$

9° 若 $n=p^k\,(p\text{ 为质数}, k\in\mathbb{N}^+)$, 则 (10) 式中的系数满足

$$p\mid b_j, \quad j=1,2,\cdots,m. \tag{12}$$

§3. 伴切比雪夫多项式的不动点 [1]

问题 1.

解方程

$$B_n(x)=x, \quad x\in\mathbb{C}, n\in\mathbb{N}^+, n\geqslant 2. \tag{1}$$

解析

解: 先假定 $x\in\mathbb{R}$, 且 $|x|\leqslant 2$, $x=2\cos\theta$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, 则 x 与 θ 之间有一一对应关系. 代入化简得

$$\cos(n\theta)=\cos\theta \Longrightarrow n\theta=2k\pi\pm\theta, k\in\mathbb{Z}, 0\leqslant\theta\leqslant\pi \tag{2}$$

$$\Longrightarrow \theta_i=\frac{2i\pi}{2m-1}(i=0,1,\cdots,m-1), \theta_{m-1+j}=\frac{2j\pi}{2m+1}(j=1,2,\cdots,m), n=2m;$$

$$\text{或 } \theta_i=\frac{i\pi}{m}(i=0,1,\cdots,m), \theta_{m+j}=\frac{j\pi}{m+1}(j=1,2,\cdots,m), n=2m+1\,(m\in\mathbb{N}^+). \tag{3}$$

故 $B_n(x)\,(n\geqslant 2)$ 的全体不动点如 (3) 式所示. 因 (1) 为 n 次方程, 在 $\mathbb{C}$ 内恰有 n 个根, 即为 (3). 易证 (3) 互异, 详略. □

§4. 伴切比雪夫型基本方程组 [1]

问题 2.

设 $k, n_1, n_2, \cdots, n_k\in\mathbb{N}^+-\{1\}$, $x_1, x_2, \cdots, x_k\in\mathbb{C}$, 称

$$x_2=B_{n_1}(x_1), x_3=B_{n_2}(x_2), \cdots, x_k=B_{n_{k-1}}(x_{k-1}), x_1=B_{n_k}(x_k) \tag{1}$$

为伴切比雪夫型基本方程组. 试解之.

解析

解: 先假定 $x_1\in\mathbb{R}$, 且 $|x_1|\leqslant 2$, $x_1=2\cos\theta$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, 则 x_1 与 θ 之间有一一对应关系. 代入化简并

递推得

$$x_2=2\cos(n_1\theta),x_3=2\cos(n_1n_2\theta),\cdots,x_k=2\cos(n_1n_2\cdots n_{k-1}\theta),$$

$$x_1=2\cos(n\theta),n=n_1n_2\cdots n_k\in\mathbb{N}^+-\{1\} \tag{2}$$

$$\Longrightarrow B_n(x_1)=x_1 \tag{3}$$

$$\Longrightarrow (x_1,x_2,\cdots,x_k)=(2\cos\theta,2\cos(n_1\theta),2\cos(n_1n_2\theta),\cdots,2\cos(n_1n_2\cdots n_{k-1}\theta)), \tag{4}$$

其中 θ 如上节 (3) 式所示. 易证 (4) 为所求全部解, 且均相异. 详略. □

问题 2A.

求解 2 元伴切比雪夫型基本方程组:

$$y=B_2(x),x=B_3(y). \tag{5}$$

解析

详解略. 答案:

$$(x,y)=\big(2\cos\theta,2\cos(2\theta)\big),\theta=0,\frac{2\pi}{5},\frac{4\pi}{5},\frac{2\pi}{7},\frac{4\pi}{7},\frac{6\pi}{7}. \tag{6}$$

问题 2B.

求解 3 元伴切比雪夫型基本方程组:

$$y=B_5(x),z=B_5(y),x=B_5(z). \tag{7}$$

解析

详解略. 答案:

$$(x,y,z)=\big(2\cos\theta,2\cos(5\theta),2\cos(25\theta)\big),\theta=\frac{i\pi}{62}(i=0,1,\cdots,62)\text{ 或 }\frac{j\pi}{63}(j=1,2,\cdots,62). \tag{8}$$

评论: 问题 2B 即为 [2] 的问题研究 227A, 共 125 组解.

参考文献

[1] 吴　康, 龙开奋. 关于切比雪夫多项式的一些研究 [J]. 中学数学研究 (广州), 2006 年第 3 期, P27 ∼ 30.
[2] 叶　军. 第 227 期问题研究 A[J]. “数学爱好者通讯”公众号, 2023-02-14.