



## 余弦“三套车”幂和式

III 华南师范大学    R 吴康

## §1. 余弦“三套车”

## 概要

三元数组  $(u, v, w)$  称为余弦“三套车”，其中

$$u = 2 \cos 40^\circ, \quad v = 2 \cos 80^\circ, \quad w = 2 \cos 160^\circ. \quad (1)$$

余弦“三套车”是笔者起的名字，缘于  $u, v, w$  的相关运算曾考验一些数学爱好者的耐心，故起此名，希望能被理解和接受。本文与文<sup>[1][2]</sup>有一定联系。

## §2. 余弦“三套车”幂和式数列的特征方程与初始值组

## 定义

称

$$P_n = u^n + v^n + w^n \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad (1)$$

为余弦“三套车”幂和式数列， $u, v, w$  为其特征根。

## 定理 1

$\{P_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  的特征方程<sup>[3]</sup>为

$$t^3 - 3t + 1 = 0. \quad (2)$$

## 解析

**证明：**考察笔者称为切比雪夫型基本方程<sup>[4]</sup>的三角方程

$$\cos 5\theta = \cos 4\theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi. \quad (3)$$

易解得

$$5\theta = 2k\pi \pm 4\theta \quad (k \in \mathbb{Z}). \quad (4)$$

由  $0 \leq \theta \leq \pi$  可得

$$\theta = 0, \frac{2\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}, \frac{2\pi}{3}, \frac{8\pi}{9}. \quad (5)$$

另一方面，令  $\cos \theta = x$ ，按切比雪夫多项式展开<sup>[4]</sup>可得

$$16x^5 - 20x^3 + 5x = 8x^4 - 8x^2 + 1 \implies (x-1)(2x+1)(8x^3 - 6x + 1) = 0. \quad (6)$$

易知  $\cos \frac{2\pi}{9}, \cos \frac{4\pi}{9}, \cos \frac{8\pi}{9}$  满足方程

$$8x^3 - 6x + 1 = 0. \quad (7)$$

令  $t = 2x$ ，即知  $u, v, w$  是方程 (2) 的三根。□

## 定理 2

三元幂和式数列  $\{P_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  满足常系数线性齐次 3 阶递推关系式

$$P_{n+3} - 3P_{n+1} + P_n = 0 \quad (n \in \mathbb{Z}). \quad (8)$$

## 说明

证略。



### 定理 3

$$\cos 40^\circ + \cos 80^\circ + \cos 160^\circ = 0, \quad (9)$$

$$\cos 40^\circ \cos 80^\circ + \cos 80^\circ \cos 160^\circ + \cos 160^\circ \cos 40^\circ = -\frac{3}{4}, \quad (10)$$

$$\cos 40^\circ \cos 80^\circ \cos 160^\circ = -\frac{1}{8}. \quad (11)$$

### 解析

**证明:** 由于  $u, v, w$  是方程 (2) 的三根, 由 3 阶韦达定理可得  $u+v+w=0$ ,  $uv+vw+wu=-3$ ,  $uvw=-1$ , 略加变化便得 (9), (10), (11) 式.  $\square$

### 定理 4

数列  $\{P_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  的初始值组<sup>[5]</sup>

$$\Omega_{-1} = (3, 3, 0). \quad (12)$$

### 解析

**证明:**  $P_{-1} = u^{-1} + v^{-1} + w^{-1} = (uvw)^{-1}(uv + vw + wu) = (-1)^{-1} \times (-3) = 3$ ,

$$P_0 = u^0 + v^0 + w^0 = 3,$$

$$P_1 = u + v + w = 0. \quad \square$$

## §3. 余弦“三套车”幂和式数列 $P_n$ ( $-17 \leq n \leq 30$ )

### 概要

下列数据可帮助计算 (精确到  $10^{-9}$ ):

$$u = 1.532088886, \quad (1)$$

$$v = 0.3472963553, \quad (2)$$

$$w = -1.879385242. \quad (3)$$

另外, 易由余弦积化和差公式证得

$$u^{-1} = 1 - v = 0.6527036447, \quad (4)$$

$$v^{-1} = 1 - w = 2.879385242, \quad (5)$$

$$w^{-1} = 1 - u = -0.532088886. \quad (6)$$

由上节 (12) 和 (8) 式双向递推可得以下的表 1.

表 1 余弦“三套车”幂和式  $P_n$  值表

$n$	-17	-16	-15	-14	-13	-12	-11	-10
$P_n$	64283004	22325253	7753479	2692755	935184	324786	112797	39174
$n$	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2
$P_n$	13605	4725	1641	570	198	69	24	9
$n$	-1	0	1	2	3	4	5	6
$P_n$	3	3	0	6	-3	18	-15	57
$n$	7	8	9	10	11	12	13	14
$P_n$	-63	186	-246	621	-924	2109	-3393	7251
$n$	15	16	17	18	19	20	21	22
$P_n$	-12288	25146	-44115	87726	-157491	307293	-560199	1079370
$n$	23	24	25	26	27	28	29	30
$P_n$	-1987890	3798309	-7043040	13382817	-24927429	47191491	-88165104	166501902

显然  $P_n$  全为整数, 且都是 3 的倍数. 又因  $P_1 = 0$ , 故  $P_n$  拥有特征根和为 0 的 3 元幂和式<sup>[6][7]</sup> 的相应性质. 例如

$$p \mid P_p \quad (p \text{ 为质数}). \quad (7)$$

详略.  $\blacksquare$



### 参考文献

- [1] 吴 康. 余弦“三剑客”幂和式 [J]. “数学风”公众号, 2022-12-04; “数学风”电子杂志, 总第 1 辑, SXF1-17, 2023-01-01.
- [2] 吴 康. 余弦“戎装三剑客”幂和式 [J]. “数学风”公众号, 2022-12-29; “数学风”电子杂志, 总第 1 辑, SXF1-25, 2023-01-01.
- [3] 曹汝成. 组合数学 [M]. 第二版. 广州: 华南理工大学出版社, 2012, P80 ~ 94.
- [4] 吴 康、龙开奋. 关于切比雪夫多项式的一些研究 [J]. 中学数学研究, 2006 年第 3 期, P27 ~ 30.
- [5] 吴 康.  $k$  元幂和式满足的递推关系式 (I)[J]. “苏国东数学教学”公众号, 2022-11-23.
- [6] 吴 康. 特征根和为零的三元幂和分式构成的恒等式 [J]. “数高研”公众号, 2022-11-30.
- [7] 吴 康. 特征根和为零的三元与四元幂和式数列与方程 [J]. “数学风”公众号, 2022-12-22; “数学风”电子杂志, 总第 1 辑, SXF1-24, 2023-01-01.