数变数情

余弦“四君子”幂和式

华南师范大学 吴 康

§1. 余弦“四君子”

概要

四元数组 (a,b,c,d) 称为余弦“四君子”, 其中 (数据精确到 10^{-14})

$$a=2\cos 24^\circ=\frac{1}{4}\left(\sqrt{5}+1+\sqrt{30-6\sqrt{5}}\right)=1.82709091528520, \tag{1}$$

$$b=2\cos 48^\circ=\frac{1}{4}\left(-\sqrt{5}+1+\sqrt{30+6\sqrt{5}}\right)=1.33826121271772, \tag{2}$$

$$c=2\cos 96^\circ=\frac{1}{4}\left(\sqrt{5}+1-\sqrt{30-6\sqrt{5}}\right)=-0.20905692653531, \tag{3}$$

$$d=2\cos 192^\circ=\frac{1}{4}\left(-\sqrt{5}+1+\sqrt{30+6\sqrt{5}}\right)=-1.95629520146761, \tag{4}$$

余弦“四君子”是笔者起的名字, 缘于 a,b,c,d 的相关运算曾着实考验一些数学爱好者的耐心, 故起此名, 希望能被理解和接受. 本文与文 [1][2][3] 有一定联系.

§2. 余弦“四君子”幂和式数列

定义

称

$$S_n=a^n+b^n+c^n+d^n \quad (n\in\mathbb{Z}) \tag{1}$$

为余弦“四君子”幂和式数列, a,b,c,d 为其特征根.

定理 1

$\{S_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 的特征方程 [4] 为

$$t^4-t^3-4t^2+4t+1=0. \tag{2}$$

解析

证明: 考察笔者称为切比雪夫型基本方程 [5] 的三角方程

$$\cos 8\theta=\cos 7\theta,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\pi. \tag{3}$$

易解得

$$8\theta=2k\pi\pm 7\theta\quad (k\in\mathbb{Z}). \tag{4}$$

由 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ 可得

$$\theta=0,\frac{2\pi}{15},\frac{4\pi}{15},\frac{2\pi}{5},\frac{8\pi}{15},\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{5},\frac{14\pi}{15}. \tag{5}$$

另一方面, 令 $\cos\theta=x$, 按切比雪夫多项式展开 [5] 可得

$$\begin{aligned}&128x^8-256x^6+160x^4-32x^2+1=64x^7-112x^5+56x^3-7x\\ \Longrightarrow\ &(x-1)(2x+1)\left(4x^2+2x-1\right)\left(16x^4-8x^3-16x^2+8x+1\right)=0.\end{aligned} \tag{6}$$

易知 $\cos\dfrac{2\pi}{15}=\cos 24^\circ$, $\cos\dfrac{4\pi}{15}=\cos 48^\circ$, $\cos\dfrac{8\pi}{15}=\cos 96^\circ$, $\cos\dfrac{14\pi}{15}=\cos 168^\circ=\cos 192^\circ$ 满足方程

$$16x^4-8x^3-16x^2+8x+1=0. \tag{7}$$

令 $t=2x$, 即知 a,b,c,d 是方程 (2) 的四根. □

定理 2

四元幂和式数列 $\{S_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 满足常系数线性齐次 4 阶递推关系式

$$S_{n+4}-S_{n+3}-4S_{n+2}+4S_{n+1}+S_n=0\quad (n\in\mathbb{Z}). \tag{8}$$

说明

证略.

定理 3

$$\cos 24^\circ + \cos 48^\circ + \cos 96^\circ + \cos 192^\circ = \frac{1}{2}, \tag{9}$$

$$\cos 24^\circ \cos 48^\circ + \cos 24^\circ \cos 96^\circ + \cos 24^\circ \cos 192^\circ + \cos 48^\circ \cos 96^\circ + \cos 48^\circ \cos 192^\circ + \cos 96^\circ \cos 192^\circ = -1, \tag{10}$$

$$\cos 24^\circ \cos 48^\circ \cos 96^\circ + \cos 24^\circ \cos 48^\circ \cos 192^\circ + \cos 24^\circ \cos 96^\circ \cos 192^\circ + \cos 48^\circ \cos 96^\circ \cos 192^\circ = -\frac{1}{2}, \tag{11}$$

$$\cos 24^\circ \cos 48^\circ \cos 96^\circ \cos 192^\circ = \frac{1}{16}. \tag{12}$$

解析

证明: 由于 a, b, c, d 是方程 (2) 的四根, 由 4 阶韦达定理可得

$$a + b + c + d = 1, \tag{13}$$

$$ab + ac + ad + bc + bd + cd = -4, \tag{14}$$

$$abc + abd + acd + bcd = -4, \tag{15}$$

$$abcd = 1. \tag{16}$$

略加变化便得 (9), (10), (11), (12) 式. □

定理 4

数列 $\{S_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 的初始值组 [6]

$$\Omega_{-1} = (-4, 4, 1, 9)\,. \tag{17}$$

解析

证明:

$$S_{-1} = a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} + d^{-1} = (abcd)^{-1}(abc + abd + acd + bcd) = 1^{-1} \times (-4) = -4, \tag{18}$$

$$S_0 = a^0 + b^0 + c^0 + d^0 = 4, \tag{19}$$

$$S_1 = a + b + c + d = 1, \tag{20}$$

$$S_2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (a + b + c + d)^2 - 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd) = 1^2 - 2 \times (-4) = 9. \tag{21}$$

□

§3. 余弦"四君子"幂和式 S_n 值表

概要

由定理 2、4 双向递推, 可得下表:

表 1　余弦"四君子"幂和式 S_n 值表 $(-12 \leqslant n \leqslant 27)$

n	-12	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5
S_n	143491199	-29997829	6271254	-1311049	274084	-57299	11979	-2504
n	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
S_n	524	-109	24	-4	4	1	9	1
n	4	5	6	7	8	9	10	11
S_n	29	-4	99	-34	349	-179	1254	-824
n	12	13	14	15	16	17	18	19
S_n	4559	-3574	16704	-15004	61549	-61709	227799	-250229
n	20	21	22	23	24	25	26	27
S_n	846254	-1004149	3153984	-3997399	11788879	-15812504	44178624	-62229509

以下数据可供计算参考 (精确到 10^{-14}):

$$\begin{aligned} a^{-1} &= 0.54731813925302,\ b^{-1} = 0.74723827493230, \\ c^{-1} &= -4.78338611675281,\ d^{-1} = -0.51117029743251. \end{aligned} \tag{1}$$

易见 S_n 恒为整数 $(n \in \mathbb{Z})$. 确定 S_n 的个位数字颇为有趣.

参考文献

[1] 吴　康. 余弦"三剑客"幂和式 [J]. "数学风"公众号, 2022-12-04; "数学风"电子杂志, 总第 1 辑, SXF1-17, 2023-01-01.

[2] 吴　康. 余弦 "戎装三剑客" 幂和式 [J]. "数学风" 公众号, 2022-12-29; "数学风" 电子杂志, 总第 1 辑, SXF1-25, 2023-01-01.

[3] 吴　康. 余弦"三套车"幂和式 [J]. "数学风"公众号, 2023-01-05.

[4] 曹汝成. 组合数学 [M]. 第二版. 广州: 华南理工大学出版社, 2012, P80 ～ 94.

[5] 吴　康、龙开奋. 关于切比雪夫多项式的一些研究 [J]. 中学数学研究, 2006 年第 3 期, P27 ～ 30.

[6] 吴　康. k 元幂和式满足的递推关系式 (I)[J]. "苏国东数学教学"公众号, 2022-11-23.