



## 北大教材《高等代数》第一章多项式习题 31 的简易新解法与推广

III 华南师范大学 吴康

## § 1. 问题进展

## 概要

文 [1] 对北大教材《高等代数》<sup>[2]</sup> 第一章多项式压轴习题 31 给出不同于配套教辅 [3] 的新解法. 原题:

## 31.

设  $a, b, c$  是方程  $5x^3 - 6x^2 + 7x - 8 = 0$  的三个根, 计算

$$L = (a^2 + ab + b^2)(b^2 + bc + c^2)(a^2 + ac + c^2). \quad (1)$$

## 概要

原解法可称为“对称多项式基本定理应用解法”, 计算量较大; 文 [1] 的解法可称为“幂和式数列递推方法”, 计算量稍减. 两种方法都要展开  $L$ , 比较麻烦.

## § 2. 第三种解法

## 解析

笔者近日钻研, 再获新解, 且甚为简易:

**解法 3:** 记  $f(x) = 5x^3 - 6x^2 + 7x - 8$ . 显然  $a + b + c = \frac{6}{5}$ ,  $abc = \frac{8}{5}$ , 故

$$\begin{aligned} L &= \prod (a^2 + ab + b^2) = \prod [(a+b)^2 - ab] = \prod \left[ \left( \frac{6}{5} - c \right)^2 - \frac{8}{5c} \right] \\ &= \prod \frac{25c^3 - 60c^2 + 36c - 40}{25c} = \prod \frac{25c^3 - 60c^2 + 36c - 40 - 5f(c)}{25c} \\ &= \prod \frac{-30c^2 + c}{25c} = \prod \frac{1 - 30c}{25} = \prod \frac{6}{5} \left( \frac{1}{30} - c \right) = \left( \frac{6}{5} \right)^3 \cdot \frac{1}{5} f\left( \frac{1}{30} \right) = -\frac{1679}{625}. \quad \square \end{aligned} \quad (1)$$

**评论:** 此法仅用到韦达定理与因式定理, 可称为“因式定理应用解法”.

## § 3. 推广

## 31C.

计算

$$L_3 = \prod (a^3 + a^2b + ab^2 + b^3). \quad (1)$$

## 解析

**解:** (因式定理应用解法) 记号同上, 易见

$$\begin{aligned} L_3 &= \prod (a+b)(a^2+b^2) = \prod \left( \frac{6}{5} - c \right) \left( -\frac{34}{25} - c^2 \right) \\ &= \prod \left[ -\left( \frac{6}{5} - c \right) \left( \frac{\sqrt{34}}{5}i - c \right) \left( -\frac{\sqrt{34}}{5}i - c \right) \right] \\ &= (-1)^3 \frac{1}{5} f\left( \frac{6}{5} \right) \times \frac{1}{5} f\left( \frac{\sqrt{34}}{5}i \right) \times \frac{1}{5} f\left( -\frac{\sqrt{34}}{5}i \right) \\ &= -\frac{1}{5^3} \times \frac{2}{5} \times \left( \frac{4 + \sqrt{34}i}{25} \right) \left( \frac{4 - \sqrt{34}i}{25} \right) = -\frac{4}{15625}. \quad \square \end{aligned} \quad (2)$$

**评论:** 若使用前两种解法, 计算量较大.



### 参考文献

- [1] 吴 康. 北大教材《高等代数》第一章多项式习题 31 新解与推广 [J]. “数学风”公众号, 2023-02-16; “鲲鹏图南教育科技”公众号, 2023-02-16.
- [2] 北京大学数学系前代数小组编, 王萼芳、石生明修订. 高等代数 [M]. 第五版. 北京: 高等教育出版社, 2019 年 5 月. (1978 年 3 月第 1 版, 2013 年 8 月第 4 版) P26 ~ 30.
- [3] 王萼芳、石生明编. 高等代数辅导与习题解答 [M]. 北大·第五版. 北京: 高等教育出版社, 2019 年 10 月. P17 ~ 18.