



## 单谈数学

### 一道数论题

单 埠

#### 导言

猴猫狗, 是 2023 年 Promgs 试题的第 9 题, 大概是其中最难的一题.

下面是第一题, 一道数论题, 不难.

#### 问题

考虑数列

$$a_1 = 2^1 - 3 = -1,$$

$$a_2 = 2^2 - 3 = 1,$$

$$a_3 = 2^3 - 3 = 5,$$

$$a_4 = 2^4 - 3 = 13,$$

...

$$a_n = 2^n - 3,$$

...

数列中, 哪些项被 5 整除? 哪些项被 13 整除? 哪些项被  $5 \times 13 = 65$  整除? 为什么能整除? 为什么不能整除?

#### 解析

**解:**  $2^m \equiv 1 \pmod{5}$  的最小的正整数解为  $m = 4$ , 所以  $2^n - 3 \equiv 0 \pmod{5}$  的解为

$$n = 4k + 3 \quad (k \text{ 为非负整数}).$$

同样  $2^n - 3 \equiv 0 \pmod{13}$  的解为

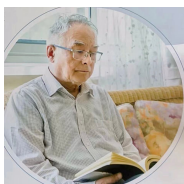
$$n = 12k + 4 \quad (k \text{ 为非负整数}).$$

但  $4k + 3 \neq 12h + 4$  (右边被 4 整除, 左边不), 所以没有被 65 整除的  $a_n$ .  $\square$



## 单增教授

### 作者简介



单增, 1943 年生, 我国著名数学传播、普及和数学竞赛的专家。1964 年毕业于扬州师范学院数学系, 在中学、大学任教四十多年。1983 年获理科博士学位 (我国首批 18 名博士之一), 1991 年当选全国“优秀教师”, 1991 年 7 月起享受政府特殊津贴, 1992 年评为国家有突出贡献的中青年专家, 1995 年评为省“优秀学科带头人”。曾任南京师范大学数学系主任, 中国数学奥林匹克委员会委员、教练组组长, 国家教委理科试验班专家组组长, 南京数学学会理事长。主要从事数论与组合方面的研究, 很多成果达到国际先进水平。1989 年作为中国数学奥林匹克代表队副领队、主教练, 1990 年作为领队, 率队参赛 IMO 均获总分第一, 为我国数学竞赛事业作出很大贡献。

做自己喜欢做的事, 做自己能够做的事, 一辈子努力做下去, 一辈子活得很开心。 ——单 增