



有趣的数列

单 埠

问题

已知实数数列

$$a_0, a_1, a_2, \dots$$

满足

$$\frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1}) \geq a_n. \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (1)$$

求证:

$$\frac{1}{2}(a_0 + a_{n+1}) \geq \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n). \quad (2)$$

解析

解: 这个数列的确很有趣. (1) 表明 (从 $n = 1$ 起), 每一项 a_n 不大于它相邻两项的平均数.

用 (1) 来证明 (2) (两项的平均数不小于中间项的平均数), 并不难. 但表述准确却也要费点事.

首先,

$$a_0 + a_2 \geq 2a_1,$$

$$a_1 + a_3 \geq 2a_2,$$

...

$$a_{n-1} + a_{n+1} \geq 2a_n.$$

相加并化简, 得

$$a_0 + a_{n+1} \geq a_1 + a_n. \quad (3)$$

从而

$$a_0 + a_{n+1} \geq a_1 + a_n \geq a_2 + a_{n-1},$$

$$a_0 + a_{n+1} \geq a_3 + a_{n-2},$$

...

$$a_0 + a_{n+1} \geq a_k + a_{k+1} \text{ 或 } 2a_k, \text{ (若 } n = 2k \text{ 或 } 2k - 1 \text{).}$$



再重复写一遍 (右边两项交换位置)

$$a_0 + a_{n+1} \geq a_{k+1} + a_k \text{ 或 } 2a_k,$$

...

$$a_0 + a_{n+1} \geq a_{n-1} + a_2,$$

$$a_0 + a_{n+1} \geq a_n + a_1.$$

将 (3) 及以下各式相加, 得

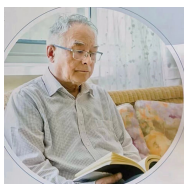
$$n(a_0 + a_{n+1}) \geq 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_n).$$

即 (2) 成立. □



单增教授

作者简介



单增, 1943 年生, 我国著名数学传播、普及和数学竞赛的专家。1964 年毕业于扬州师范学院数学系, 在中学、大学任教四十多年。1983 年获理科博士学位 (我国首批 18 名博士之一), 1991 年当选全国“优秀教师”, 1991 年 7 月起享受政府特殊津贴, 1992 年评为国家有突出贡献的中青年专家, 1995 年评为省“优秀学科带头人”。曾任南京师范大学数学系主任, 中国数学奥林匹克委员会委员、教练组组长, 国家教委理科试验班专家组组长, 南京数学学会理事长。主要从事数论与组合方面的研究, 很多成果达到国际先进水平。1989 年作为中国数学奥林匹克代表队副领队、主教练, 1990 年作为领队, 率队参赛 IMO 均获总分第一, 为我国数学竞赛事业作出很大贡献。

做自己喜欢做的事, 做自己能够做的事, 一辈子努力做下去, 一辈子活得很开心。 ——单 增