有趣的数列

单 墫

问题

已知实数数列

$$a_0, a_1, a_2, \cdots$$

满足

$$\frac{1}{2}\left(a_{n-1}+a_{n+1}\right) \geqslant a_n. \quad (n=1,2,\cdots). \tag{1}$$

求证:

$$\frac{1}{2}\left(a_0+a_{n+1}\right) \geqslant \frac{1}{n}\left(a_1+a_2+\cdots+a_n\right). \tag{2}$$

解析

解: 这个数列的确很有趣. (1) 表明 (从 $n=1$ 起), 每一项 a_n 不大于它相邻两项的平均数.

用 (1) 来证明 (2) (两项的平均数不小于中间项的平均数), 并不难. 但表述准确却也要费点事.

首先,

$$\begin{gathered} a_0+a_2 \geqslant 2a_1, \\ a_1+a_3 \geqslant 2a_2, \\ \cdots \\ a_{n-1}+a_{n+1} \geqslant 2a_n. \end{gathered}$$

相加并化简, 得

$$a_0+a_{n+1} \geqslant a_1+a_n. \tag{3}$$

从而

$$\begin{aligned} & a_0+a_{n+1} \geqslant a_1+a_n \geqslant a_2+a_{n-1}, \\ & a_0+a_{n+1} \geqslant a_3+a_{n-2}, \\ & \qquad \cdots \\ & a_0+a_{n+1} \geqslant a_k+a_{k+1} \text{ 或 } 2a_k, \left(\text{若 } n=2k \text{ 或 } 2k-1\right). \end{aligned}$$

再重复写一遍 (右边两项交换位置)

$$a_0 + a_{n+1} \geqslant a_{k+1} + a_k \text{ 或 } 2a_k,$$

$$\cdots$$

$$a_0 + a_{n+1} \geqslant a_{n-1} + a_2,$$

$$a_0 + a_{n+1} \geqslant a_n + a_1.$$

将 (3) 及以下各式相加, 得

$$n\left(a_0 + a_{n+1}\right) \geqslant 2\left(a_1 + a_2 + \cdots + a_n\right).$$

即 (2) 成立. □

单墫教授

作者简介

单墫,1943 年生,我国著名数学传播、普及和数学竞赛的专家。1964 年毕业于扬州师范学院数学系,在中学、大学任教四十多年。1983 年获理科博士学位 (我国首批 18 名博士之一),1991 年当选全国“优秀教师”,1991 年 7 月起享受政府特殊津贴,1992 年评为国家有突出贡献的中青年专家,1995 年评为省“优秀学科带头人”。曾任南京师范大学数学系主任,中国数学奥林匹克委员会委员、教练组组长,国家教委理科试验班专家组组长,南京数学学会理事长。主要从事数论与组合方面的研究,很多成果达到国际先进水平。1989 年作为中国数学奥林匹克代表队副领队、主教练,1990 年作为领队,率队参赛 IMO 均获总分第一,为我国数学竞赛事业作出很大贡献。

做自己喜欢做的事, 做自己能够做的事, 一辈子努力做下去, 一辈子活得很开心. ——单　墫