单谈数学

正整数数列

单 墫

问题

正整数数列

$$a_{n+2}=\frac{a_n+2023}{a_{n+1}+1},\qquad (n\in\mathbb{N})$$

求 a_1+a_2 的最小值.

解析

解: 正整数, 这个条件很重要. 由已知

$$a_3a_2+a_3=a_1+2023,$$

$$a_4a_3+a_4=a_2+2023.$$

两式相减得

$$(a_4-a_2)\,a_3+a_4-a_3=a_2-a_1.$$

即

$$(a_4-a_2)\,(a_3+1)=a_3-a_1. \tag{1}$$

如果 $a_4>a_2$, 那么 (1) 式左边 $\geqslant a_3+1>$ 右边.

如果 $a_4=a_2$, 那么 $a_3=a_1$. 这时

$$2023=a_3a_4=a_1a_2. \tag{2}$$

因为 $2023=7\times17^2$, 所以满足 (2) 的 a_1、a_2 在 $a_1+a_2=17+7\times17=8\times17=136$ 时最小. 而且 $a_1=17$, $a_2=7\times17$ 与 $a_1=7\times17$, $a_2=17$ 分别得数列

$$17,7\times17,17,7\times17,\cdots$$

与

$$7\times17,17,7\times17,17,\cdots$$

如果 $a_4<a_2$, 那么 $a_3<a_1$. 从而

$$a_1>a_3>a_5>\cdots\quad(a_2>a_4>a_6>\cdots).$$

但正整数数列必有最小数, 不能无限 (严格) 递降, 因此 $a_4<a_2$ 的情况不会发生.

因此 a_1+a_2 的最小值为 136. □

单墫教授

作者简介

单墫，1943 年生，我国著名数学传播、普及和数学竞赛的专家。1964 年毕业于扬州师范学院数学系，在中学、大学任教四十多年。1983 年获理科博士学位 (我国首批 18 名博士之一)，1991 年当选全国“优秀教师”，1991 年 7 月起享受政府特殊津贴，1992 年评为国家有突出贡献的中青年专家，1995 年评为省“优秀学科带头人”。曾任南京师范大学数学系主任，中国数学奥林匹克委员会委员、教练组组长，国家教委理科试验班专家组组长，南京数学学会理事长。主要从事数论与组合方面的研究，很多成果达到国际先进水平。1989 年作为中国数学奥林匹克代表队副领队、主教练，1990 年作为领队，率队参赛 IMO 均获总分第一，为我国数学竞赛事业作出很大贡献。

做自己喜欢做的事，做自己能够做的事，一辈子努力做下去，一辈子活得很开心.　——单　墫