



正整数数列

单 埠

问题

正整数数列

$$a_{n+2} = \frac{a_n + 2023}{a_{n+1} + 1}, \quad (n \in \mathbb{N})$$

求 $a_1 + a_2$ 的最小值.

解析

解: 正整数, 这个条件很重要. 由已知

$$a_3 a_2 + a_3 = a_1 + 2023,$$

$$a_4 a_3 + a_4 = a_2 + 2023.$$

两式相减得

$$(a_4 - a_2) a_3 + a_4 - a_3 = a_2 - a_1.$$

即

$$(a_4 - a_2)(a_3 + 1) = a_3 - a_1. \quad (1)$$

如果 $a_4 > a_2$, 那么 (1) 式左边 $\geq a_3 + 1 >$ 右边.如果 $a_4 = a_2$, 那么 $a_3 = a_1$. 这时

$$2023 = a_3 a_4 = a_1 a_2. \quad (2)$$

因为 $2023 = 7 \times 17^2$, 所以满足 (2) 的 a_1, a_2 在 $a_1 + a_2 = 17 + 7 \times 17 = 8 \times 17 = 136$ 时最小. 而且 $a_1 = 17, a_2 = 7 \times 17$ 与 $a_1 = 7 \times 17, a_2 = 17$ 分别得数列

$$17, 7 \times 17, 17, 7 \times 17, \dots$$

与

$$7 \times 17, 17, 7 \times 17, 17, \dots$$

如果 $a_4 < a_2$, 那么 $a_3 < a_1$. 从而

$$a_1 > a_3 > a_5 > \dots \quad (a_2 > a_4 > a_6 > \dots).$$

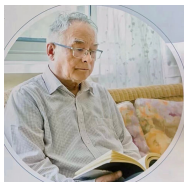
但正整数数列必有最小数, 不能无限 (严格) 递减, 因此 $a_4 < a_2$ 的情况不会发生.

因此 $a_1 + a_2$ 的最小值为 136. □



单增教授

作者简介



单增, 1943 年生, 我国著名数学传播、普及和数学竞赛的专家。1964 年毕业于扬州师范学院数学系, 在中学、大学任教四十多年。1983 年获理科博士学位 (我国首批 18 名博士之一), 1991 年当选全国“优秀教师”, 1991 年 7 月起享受政府特殊津贴, 1992 年评为国家有突出贡献的中青年专家, 1995 年评为省“优秀学科带头人”。曾任南京师范大学数学系主任, 中国数学奥林匹克委员会委员、教练组组长, 国家教委理科试验班专家组组长, 南京数学学会理事长。主要从事数论与组合方面的研究, 很多成果达到国际先进水平。1989 年作为中国数学奥林匹克代表队副领队、主教练, 1990 年作为领队, 率队参赛 IMO 均获总分第一, 为我国数学竞赛事业作出很大贡献。

做自己喜欢做的事, 做自己能够做的事, 一辈子努力做下去, 一辈子活得很开心。 ——单 增