吴康专辑

SSMJ 问题 5697 的进一步推广

华南师范大学 吴 康

§1. SSMJ 问题 5697 与推广 ABC

问题 5697.

在实数范围内解方程:

$$\left(x^2-6x+5\right)^5+\left(x^2-9x+14\right)^5-\left(2x^2-15x+19\right)^5=0. \quad (1)$$

问题 5697A.

在复数范围内解方程 (1).

问题 5697B.

分别在实数和复数范围内解方程:

$$\left(x^2-6x+5\right)^7+\left(x^2-9x+14\right)^7-\left(2x^2-15x+19\right)^7=0. \quad (2)$$

问题 5697C.

分别在实数和复数范围内解方程:

$$(\mathrm{I})\ \left(x^2-\sqrt{3}x+2\right)^5+\left(x^2-1\right)^5-\left(2x^2-\sqrt{3}x+1\right)^5=0. \quad (3)$$

$$(\mathrm{II})\ \left(x^2-\sqrt{3}x+2\right)^7+\left(x^2-1\right)^7-\left(2x^2-\sqrt{3}x+1\right)^7=0. \quad (4)$$

说明

著名学考张云勇教授在 [1] 中给出 SSMJ 问题 5697 的解答; 笔者在 [2] 中给出问题的“递推解法”, 并给出问题的一系列推广——向复数范围的推广 (A), 向更高次数的推广 (B), 以及向其它幂底的推广 (C) 的解法.

§2. 问题向更高次的幂底推广

问题 5687D.

分别在实数和复数范围内解方程:

$$(\text{I})\ \left(4x^3-11x-10\right)^5-\left(6x^2+11\right)^5 -\left(4x^3-6x^2-11x-21\right)^5=0; \tag{1}$$

$$(\text{II})\ \left(4x^3-11x-10\right)^7-\left(6x^2+11\right)^7 -\left(4x^3-6x^2-11x-21\right)^7=0; \tag{2}$$

$$(\text{III})\ 2\left(4x^3-11x-10\right)^8+2\left(6x^2+11\right)^8 +2\left(4x^3-6x^2-11x-21\right)^8 -\left[\left(4x^3-11x-10\right)^4+\left(6x^2+11\right)^4 +\left(4x^3-6x^2-11x-21\right)^4\right]^2=0. \tag{3}$$

解析

解: 令

$$a=4x^3-11x-10, \tag{4}$$

$$b=-6x^2-11, \tag{5}$$

$$c=-4x^3+6x^2+11x+21, \tag{6}$$

$$S_n=a^n+b^n+c^n \quad (n\in\mathbf{N}), \tag{7}$$

$$P=-(bc+ca+ab), \tag{8}$$

$$Q=abc, \tag{9}$$

则方程 (1), (2), (3) 可化为方程

$$S_5=0, \tag{10}$$

$$S_7=0, \tag{11}$$

$$2S_8-S_4^2=0. \tag{12}$$

易见

$$a+b+c=0, \tag{13}$$

三元幂和式数列 $\{S_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ 满足常系数线性齐次 3 阶递推关系式

$$S_{n+3}=PS_{n+1}+QS_n \quad (n\in\mathbf{N}), \tag{14}$$

并且

$$S_0=3, \tag{15}$$

$$S_1=0, \tag{16}$$

$$S_2=(a+b+c)^2-2(bc+ca+ab)=2P, \tag{17}$$

$$S_3=PS_1+QS_0=3Q, \tag{18}$$

$$S_4=PS_2+QS_1=2P^2, \tag{19}$$

$$S_5=PS_3+QS_2=5PQ, \tag{20}$$

$$S_6=PS_4+QS_3=2P^3+3Q^2, \tag{21}$$

$$S_7=PS_5+QS_4=7P^2Q, \tag{22}$$

$$S_8=PS_6+QS_5=2P^4+8PQ^2, \tag{23}$$

故方程 (1), (2), (3) 即 (10), (11), (12) 可化为方程

$$5PQ=0, \tag{24}$$

$$7P^2Q=0, \tag{25}$$

$$16PQ^2=0. \tag{26}$$

从而都可归结为两个方程:

$$P=0; \tag{27}$$

$$Q=0. \tag{28}$$

1° 在实数范围内求解:

(i) $P=0 \Rightarrow S_2=0 \Rightarrow a^2+b^2+c^2=0$

$$\Rightarrow a=b=c=0, \text{无解}. \tag{29}$$

$$\text{(ii) } Q=0 \Rightarrow abc=0 \Rightarrow a,b \text{ 或 } c=0. \tag{30}$$

$$a=0 \Rightarrow (x-2)\left(4x^2+8x+5\right)=0 \Rightarrow x=2. \tag{31}$$

$$b=0 \Rightarrow 6x^2+11=0, \text{无解}. \tag{32}$$

$$c=0 \Rightarrow -(x-3)\left(4x^2+6x+7\right)=0 \Rightarrow x=3. \tag{33}$$

因此, 方程 (1), (2) 的实根都是 2, 3, 共 2 个; 方程 (3) 的实根是 2, 3, 都是二重根, 共 4 个.

2° 在复数范围内求解:

(i) $P=0 \Rightarrow a^2+b^2+(a+b)^2=0 \Rightarrow a^2+ab+b^2=0$

$$\Rightarrow a=\omega b \text{ 或 } \varpi b, \tag{34}$$

其中 $\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}=\cos\frac{2}{3}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{2}{3}\pi$ 为 1 的 3 次虚根. 而

$$a=\omega b\Rightarrow 4x^3-11x-10=\omega\left(-6x^2-11\right)$$

$$\Rightarrow(x-\omega)\left(4x^2+10\omega x-21-10\omega\right)=0; \tag{35}$$

$$a=\overline{\omega}b\Rightarrow 4x^3-11x-10=\overline{\omega}\left(-6x^2-11\right)$$

$$\Rightarrow(x-\overline{\omega})\left(4x^2+10\overline{\omega}x-21-10\overline{\omega}\right)=0. \tag{36}$$

(34) 的根为

$$\omega,\overline{\omega},\alpha,\beta=\frac{1}{4}\left[-5\omega\pm(u+v\mathrm{i})\right],\overline{\alpha},\overline{\beta}, \tag{37}$$

其中 $u+v\mathrm{i}$ 是 $59+15\omega$ 的任一平方根 $(u,v\in\mathbf{R})$, $\overline{z}$ 表示复数 z 的共轭复数. 亦可用反三角函数形式表示 (37) 为

$$\omega,\overline{\omega},\alpha,\beta=\frac{1}{4}\left[-5\omega\pm r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)\right],\overline{\alpha},\overline{\beta}, \tag{38}$$

其中

$$r=\sqrt[4]{2821}, \tag{39}$$

$$\theta=\frac{1}{2}\arccos\frac{103}{2\sqrt{2821}}. \tag{40}$$

(ii) $Q=0\Rightarrow a,b$ 或 $c=0$. $\quad(41)$

$$a=0\Rightarrow x=2,\frac{1}{2}(-2\pm\mathrm{i}). \tag{42}$$

$$b=0\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{11}{6}}\mathrm{i}. \tag{43}$$

$$c=0\Rightarrow x=3,\frac{1}{4}\left(-3\pm\sqrt{19}\mathrm{i}\right). \tag{44}$$

因此, 方程 (1) 的复根是 (37), (42) ∼ (44), 共 14 个; 方程 (2) 的复根是二重根 (37), 以及 (42) ∼ (44), 共 20 个; 方程 (3) 的复根是二重根 (42) ∼ (44), 以及 (37), 共 22 个. □

评论: 方程 (1) 是 14 次代数方程, (2) 是 20 次代数方程, (3) 是 22 次代数方程.

参考文献

[1] 张云勇. Proposed Solution to #5697 SSMJ[J]. “许康华竞赛优学”公众号, 2022-12-05.

[2] 吴　康. SSMJ 问题 5697 的求解与推广 [J]. “数竞派”公众号, 2022-12-06.

数　竞　派

作者简介

吴　康（1957～　），男，广东高州人。华南师范大学原数学督导，数学科学学院副教授、《中学数学研究》原主编。首批中国数学奥林匹克高级教练，高校竞赛数学课程首位主讲，首批数学国家集训队教练。全国初等数学研究会理事长，广东省初等数学学会创会会长、名誉会长，广东省高考研究会创会理事长，中国高等教育学会教育数学专业委员会副理事长，原丘成桐中学数学奖南部赛区组委会主任，广东省教育系统棋类协会常务副会长。荣获全国初等数学研究突出贡献奖、广西壮族自治区科技进步奖一等奖、广东省高等教育教学成果一等奖。

（2022 年 8 月）