吴康专辑

利用单位根推广 SSMJ 问题 5697

华南师范大学 吴 康

§1. 推广 SSMJ 问题 5697 的进程

导言

著名学者张云勇教授解答了 SSMJ 问题 5697[1]. 笔者对此“幂和式方程”问题给出“递推解法”, 并在解题范围、幂指数、幂底、未知数个数四方面进行了推广, 命制并解答了问题 5697A∼H[2][3][4].

§2. 利用单位根推广 SSMJ 问题 5697

问题 5697I.

在复数范围内求解方程:

$$1^\circ x^8+\left(x^3+x^2+x+1\right)^2+\left(x^4+x^3+x^2+x+1\right)^2=0. \tag{1}$$

$$2^\circ x^{12}+\left(x^3+x^2+x+1\right)^3-\left(x^4+x^3+x^2+x+1\right)^3=0. \tag{2}$$

解析

解: 令

$$a=x^4,\quad b=x^3+x^2+x+1, \tag{3}$$

$$c=-\left(x^4+x^3+x^2+x+1\right), \tag{4}$$

$$S_n=a^n+b^n+c^n\quad\left(n\in\mathbf{N}\right), \tag{5}$$

$$P=-\left(bc+ca+ab\right),\quad Q=abc, \tag{6}$$

易见题设两个方程可化为

$$S_n=0\quad\left(n=2,3\right). \tag{7}$$

显然

$$a+b+c=0, \tag{8}$$

故三元幂和式数列 $\{S_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ 满足常系数线性齐次 3 阶递推关系式:

$$S_{n+3}=PS_{n+1}+QS_n \quad (n\in\mathbf{N}). \tag{9}$$

易知

$$S_0=3,\ S_1=0,\ S_2=2P, \tag{10}$$

递推易得

$$S_3=3Q. \tag{11}$$

1° 方程 (1) 可化为

$$P=0\Rightarrow a^2+b^2+(a+b)^2=0\Rightarrow a^2+ab+b^2=0$$

$$\Rightarrow a=\omega b\,\text{或}\,\overline{\omega}b, \tag{12}$$

其中

$$\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} \tag{13}$$

为 3 次单位根, $\overline{z}$ 表示 z 的共轭复数. 又

$$a=\omega b\Rightarrow x^4-\omega\left(x^3+x^2+x+1\right)=0$$

$$\Rightarrow (x-\omega)\left(x^3-\omega x+1\right)=0. \tag{14}$$

利用卡丹公式, 可得方程 (14) 的解为

$$\omega,(u+v)\,\overline{\omega},u\omega+v,u+\omega v, \tag{15}$$

其中实数

$$u=-\frac{1}{6}\sqrt[3]{108-12\sqrt{69}},\ v=-\frac{1}{6}\sqrt[3]{108+12\sqrt{69}}. \tag{16}$$

同理

$$a=\overline{\omega}b\Rightarrow (x-\overline{\omega})\left(x^3-\overline{\omega}x+1\right)=0$$

$$\Rightarrow x=\overline{\omega},(u+v)\,\omega,u\overline{\omega}+v,u+\overline{\omega}v. \tag{17}$$

综合知方程 (1) 有 8 个复根, 即 (15) 和 (17), 为 4 对共轭复数.

2° 方程 (2) 可化为

$$Q=0\Rightarrow abc=0\Rightarrow a,b\,\text{或}\,c=0. \tag{18}$$

易见

$$a=0 \Rightarrow x^4=0 \Rightarrow x=0\,(4\text{重根})\,; \tag{19}$$

$$b=0 \Rightarrow (x+1)\left(x^2+1\right)=0 \Rightarrow x=-1,\pm\mathrm{i}; \tag{20}$$

$$\begin{aligned} c=0 &\Rightarrow x^5-1=0\text{且}\,x-1\neq 0 \\ &\Rightarrow x=\varepsilon^j, j=1,2,3,4, \varepsilon=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}. \end{aligned} \tag{21}$$

综合知方程 (2) 有 11 个复根, 即 (19), (20) 和 (21). □

评论: (1), (2) 分别为 8 次和 11 次代数方程, ε 为 5 次单位根.

§3. 更高次数的推广

问题 5697J.

在复数范围内求解方程:

$$1^\circ x^{20}+\left(x^3+x^2+x+1\right)^5-\left(x^4+x^3+x^2+x+1\right)^5=0. \tag{1}$$

$$2^\circ x^{28}+\left(x^3+x^2+x+1\right)^7-\left(x^4+x^3+x^2+x+1\right)^7=0. \tag{2}$$

$$\begin{aligned} 3^\circ 9&\left[x^{36}+\left(x^3+x^2+x+1\right)^9-\left(x^4+x^3+x^2+x+1\right)^9\right] \\ &-\left[x^{12}+\left(x^3+x^2+x+1\right)^3-\left(x^4+x^3+x^2+x+1\right)^3\right]^3=0. \end{aligned} \tag{3}$$

解析

解: 同上题, 易见题设三个方程可化为

$$S_n=0 \quad (n=5,7)\,, \tag{4}$$

$$9S_9-S_3^3=0. \tag{5}$$

由上节 (9) ∼ (11) 式递推易得

$$\begin{aligned} &S_4=2P^2, S_5=5PQ, S_6=2P^3+3Q^2, \\ &S_7=7P^2Q, S_8=2P^4+8PQ^2, S_9=9P^3Q+3Q^3. \end{aligned} \tag{6}$$

1° 方程 (1) 可化为

$$PQ=0. \tag{7}$$

由上题知方程 (1) 有 19 个复根, 即上节 (15), (17), (19), (20), (21) 式.

2° 方程 (2) 可化为

$$P^2Q = 0. \tag{8}$$

同理知方程 (2) 有 27 个复根, 即上节 (15), (17) (每个都是 2 重根) 和 (19), (20), (21) 式.

3° 方程 (3) 可化为

$$9\left(9P^3Q + 3Q^3\right) - (3Q)^3 = 0 \Rightarrow P^3Q = 0. \tag{9}$$

同理知方程 (3) 有 35 个复根, 即上节 (15), (17) (每个都是 3 重根) 和 (19), (20), (21) 式. □

评论: (1), (2), (3) 分别为 19、27、35 次代数方程.

问题 5697K.

在复数范围内求解方程:

$$16\left[x^{40} + \left(x^3 + x^2 + x + 1\right)^{10} + \left(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1\right)^{10}\right]$$
$$-\left[x^8 + \left(x^3 + x^2 + x + 1\right)^2 + \left(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1\right)^2\right]^5 = 0. \tag{10}$$

说明

留给感兴趣的读者.

参考文献

[1] 张云勇. Proposed Solution to #5697 SSMJ[J]. “许康华竞赛优学”公众号, 2022-12-05.

[2] 吴 康. SSMJ 问题 5697 的求解与推广 [J]. “数学风”公众号, 2022-12-06.

[3] 吴 康. SSMJ 问题 5697 的进一步推广 [J]. “数学风”公众号, 2022-12-09.

[4] 吴 康. 把 SSMJ 问题 5697 推广到幂和式方程组 [J]. “数学风”公众号, 2022-12-13.

作者簡介

吴 康（1957～ ），男，广东高州人。华南师范大学原教学督导，数学科学学院副教授、《中学数学研究》原主编。首批中国数学奥林匹克高级教练，高校竞赛数学课程首位主讲，首批数学国家集训队教练。全国初等数学研究会理事长，广东省初等数学学会创会会长、名誉会长，广东省高考研究会创会理事长，中国高等教育学会教育数学专业委员会副理事长，原丘成桐中学数学奖南部赛区组委会主任，广东省教育系统棋类协会常务副会长。荣获全国初等数学研究突出贡献奖、广西壮族自治区科技进步奖一等奖、广东省高等教育教学成果一等奖。

（2022 年 8 月）