吴康专辑

把 SSMJ 问题 5697 推广到幂和式方程组

华南师范大学 吴 康

§1. 问题向幂和式方程组推广

导言

著名学者张云勇教授给出 SSMJ 问题 5697(幂和式方程) 的解答 [1]. 笔者给出新解法并推广到问题 A∼D, 也给出解答 [2][3]. 本文推广到幂和式方程组:

问题 5697E.

在实数范围内求解方程组:

$$\begin{cases}(4y-2x)^5+\left(x^2-2y+x-1\right)^5-\left(x^2+2y-x-1\right)^5=0, & (1)\\ (4x-2y)^5+\left(y^2-2x+y-1\right)^5-\left(y^2+2x-y-1\right)^5=0. & (2)\end{cases}$$

解析

解: 注意到对称性, 即 x,y 互换时, 方程 (1), (2) 互换. 令

$$a=4y-2x,\ a'=4x-2y; \tag{3}$$

$$b=x^2-2y+x-1,\ b'=y^2-2x+y-1; \tag{4}$$

$$c=-x^2-2y+x+1,\ c'=-y^2-2x+y+1; \tag{5}$$

$$S_n=a^n+b^n+c^n,\ S'_n=a'^n+b'^n+c'^n \quad (n\in\mathbf{N}); \tag{6}$$

$$P=-(bc+ca+ab),P'=-\left(b'c'+c'a'+a'b'\right); \tag{7}$$

$$Q=abc,\ Q'=a'b'c'. \tag{8}$$

易见题设方程组可化为

$$\left(S_5,S'_5\right)=(0,0). \tag{9}$$

显然

$$a+b+c=0,\ a'+b'+c'=0, \tag{10}$$

故三元幂和式数列 $\{S_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ 和 $\{S'_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ 均满足常系数线性齐次 3 阶递推关系式:

$$S_{n+3}=PS_{n+1}+QS_n \quad (n\in\mathbf{N}), \tag{11}$$

$$S'_{n+3}=P'S'_{n+1}+Q'S'_n \quad (n\in\mathbf{N}). \tag{12}$$

易知

$$\left(S_0,S'_0\right)=(3,3),\ \left(S_1,S'_1\right)=(0,0),\ \left(S_2,S'_2\right)=\left(2P,2P'\right). \tag{13}$$

递推易得

$$\left(S_3,S'_3\right)=\left(3Q,3Q'\right),\ \left(S_5,S'_5\right)=\left(5PQ,5P'Q'\right). \tag{14}$$

从而题设方程组可化为

$$\left(PQ,P'Q'\right)=(0,0). \tag{15}$$

由于

$$P=0\Rightarrow a^2+b^2+c^2=0\Rightarrow a=b=c=0\Rightarrow (x,y)=\left(\pm1,\pm\frac{1}{2}\right), \tag{16}$$

代入得 $P'Q'\neq 0$. 同理 $P'=0\Rightarrow PQ\neq 0$. 从而题设方程组可化为

$$\left(Q,Q'\right)=(0,0)\Rightarrow\left(abc,a'b'c'\right)=(0,0). \tag{17}$$

分 9 种情形求解可得下表:

表 1

$a'b'c'=0$ / $abc=0$ / (x,y)	$a'=0$	$b'=0$	$c'=0$
$a=0$	$(0,0)$	$(2p,p)$	$(-2p,-p)$
$b=0$	$(p,2p)$	(q,q)	$(-p,p)$
$c=0$	$(-p,-2p)$	$(p,-p)$	$(-q,-q)$

其中 $p=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}$, $q=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

说明: 由对称性只需详解 6 种情形. $(a,a')=(0,0)$ 是二元一次方程组, $(a,b')=(0,0)$ 和 $(a,c')=(0,0)$ 均为 "半壁二元二次方程组" (有一个方程是二元一次方程的二元二次方程组). 而 $(b,b')=(0,0)\Rightarrow b-b'=(x-y)(x+y+3)=0$, $(b,c')=(0,0)\Rightarrow b+c'=(x+y)(x-y-1)=0$, $(c,c')=(0,0)\Rightarrow c-c'=(x-y)(x+y-3)$ 均可化为两个 "半壁二元二次方程组". 不难得到所有的解, 详略.

综合得知题设方程组共有 17 组实数解, 如表 1. □

§2. 更高次数的幂和式方程组

问题 5697F.

在实数范围内求解方程组:

$$\begin{cases}(4y-2x)^7+\left(x^2-2y+x-1\right)^7-\left(x^2+2y-x-1\right)^7=0, & (1)\\ (4x-2y)^7+\left(y^2-2x+y-1\right)^7-\left(y^2+2x-y-1\right)^7=0. & (2)\end{cases}$$

解析

解: 对比题 E 和 F 知后者为 $\left(S_7,S_7'\right)=(0,0)$. 递推易知

$$\left(S_4,S_4'\right)=\left(2P^2,2P'^2\right),\ \left(S_7,S_7'\right)=\left(7P^2Q,7P'^2Q'\right), \tag{3}$$

从而题设方程组可化为

$$\left(P^2Q,P'^2Q'\right)=(0,0), \tag{4}$$

与上题同理可知接着可化为

$$\left(Q,Q'\right)=(0,0). \tag{5}$$

因此本题结果与上题完全相同, 共 17 组实数解如表 1. □

§3. 三个未知数的幂和式方程组

问题 5697G.

在实数范围内求解方程组:

$$\begin{cases} (y+z)^5+(y+z-4)^5-(2y+2z-4)^5=0, & (1)\\ (z+x)^5+(z+x-4)^5-(2z+2x-4)^5=0, & (2)\\ (x+y)^5+(x+y-4)^5-(2x+2y-4)^5=0. & (3)\end{cases}$$

解析

解: 对 $i=1,2,3$, 令

$$(x,y,z)=(u_1,u_2,u_3)\,, \tag{4}$$

$$x+y+z=U, \tag{5}$$

$$a_i=U-u_i,\ b_i=U-u_i-4,\ c_i=-(2U-2u_i-4)\,, \tag{6}$$

$$S_{i,n}=a_i^n+b_i^n+c_i^n \quad (n\in\mathbf{N})\,, \tag{7}$$

$$P_i=-(b_ic_i+c_ia_i+a_ib_i)\,, \tag{8}$$

$$Q_i=a_ib_ic_i. \tag{9}$$

题设方程组可化为

$$(S_{1,5},S_{2,5},S_{3,5})=(0,0,0)\,. \tag{10}$$

显然

$$a_i+b_i+c_i=0, \quad i=1,2,3, \tag{11}$$

故三元幂和式数列 $\{S_{i,n}\}_{n\in\mathbf{N}}$ 满足递推关系式

$$S_{i,n+3}=P_iS_{i,n+1}+Q_iS_{i,n} \quad (n\in\mathbf{N},i=1,2,3)\,. \tag{12}$$

易知

$$S_{i,0}=3,\ S_{i,1}=0,\ S_{i,2}=2P_i \quad (i=1,2,3)\,, \tag{13}$$

递推易得

$$S_{i,3}=3Q_i,\ S_{i,5}=5P_iQ_i, \tag{14}$$

从而题设方程组可化为

$$(P_1Q_1,P_2Q_2,P_3Q_3)=(0,0,0)\,. \tag{15}$$

由于对 $i=1,2,3$, 均有

$$P_i=0 \Rightarrow a_i^2+b_i^2+c_i^2=0 \Rightarrow a_i=b_i=c_i=0, \text{无解}, \tag{16}$$

故知题设方程组可化为

$$\left(Q_1,Q_2,Q_3\right)=(0,0,0) \Rightarrow \left(a_1b_1c_1,a_2b_2c_2,a_3b_3c_3\right)=(0,0,0), \tag{17}$$

进一步可化为 27 个方程组

$$(y+z-2p,z+x-2q,x+y-2r)=(0,0,0),\ p,q,r\in\{0,1,2\}. \tag{18}$$

解得

$$(x,y,z)=(q+r-p,r+p-q,p+q-r),p,q,r\in\{0,1,2\}, \tag{19}$$

写出来是

$$\begin{aligned}&(0,0,0),\ (1,1,-1),\ (2,2,-2),\ (2,0,0),\ (3,1,-1),\\ &(4,0,0),\ (1,1,1),\ (2,2,0),\ (3,1,1),\ (2,2,2),\end{aligned} \tag{20}$$

及其所有排列, 共 27 组解. □

评论: 本题解的表达比较简练.

问题 5697H.

在实数范围内求解方程组:

$$\begin{cases}(y+z)^7+(y+z-4)^7-(2y+2z-4)^7=0, & (21)\\ (z+x)^7+(z+x-4)^7-(2z+2x-4)^7=0, & (22)\\ (x+y)^7+(x+y-4)^7-(2x+2y-4)^7=0. & (23)\end{cases}$$

说明

本题答案和题 G 完全相同. 详细解答留给感兴趣的朋友.

参考文献

[1] 张云勇. Proposed Solution to #5697 SSMJ[J]. “许康华竞赛优学”公众号, 2022-12-05.

[2] 吴　康. SSMJ 问题 5697 的求解与推广 [J]. “数竞派”公众号, 2022-12-06.

[3] 吴　康. SSMJ 问题 5697 的进一步推广 [J]. “数竞派”公众号, 2022-12-09.

数 竞 派

作者简介

吴　康（1957～　），男，广东高州人。华南师范大学原教学督导，数学科学学院副教授、《中学数学研究》原主编。首批中国数学奥林匹克高级教练，高校竞赛数学课程首位主讲，首批数学国家集训队教练。全国初等数学研究会理事长，广东省初等数学学会创会会长、名誉会长，广东省高考研究会创会理事长，中国高等教育学会教育数学专业委员会副理事长，原丘成桐中学数学奖南部赛区组委会主任，广东省教育系统棋类协会常务副会长。荣获全国初等数学研究突出贡献奖、广西壮族自治区科技进步奖一等奖、广东省高等教育教学成果一等奖。

（2022 年 8 月）