吴康专辑

特征根和为 0 的三元与四元幂和式数列与方程

华南师范大学 吴 康

§1. 特征根和为 0 的三元幂和式数列

概要

三元幂和式数列 $\{S_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ 的通项公式是

$$S_n=a^n+b^n+c^n\quad(a,b,c\in\mathbf{C},n\in\mathbf{N}),\tag{1}$$

其中 a,b,c 称为特征根, 且约定 (此约定一直有效)

$$0^0=1.\tag{2}$$

当

$$a+b+c=0\tag{3}$$

时, $\{S_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ 满足常系数线性齐次 3 阶递推关系式

$$S_{n+3}=PS_{n+1}+QS_n\quad(n\in\mathbf{N}),\tag{4}$$

$$S_0=3,S_1=0,S_2=2P,\tag{5}$$

$$P=-(bc+ca+ab),Q=abc.\tag{6}$$

$-P$ 和 Q 为 a,b,c 的初等对称多项式组中的末两个多项式. 存在二元多项式 $f_n(x,y)$, 满足

$$f_n(x,y)=\sum_{\substack{2i+3j=n\\ i,j\in\mathbf{N}}}l_{i,j}x^iy^j\quad(n\in\mathbf{N},n\geqslant 2),\tag{7}$$

$$f_0(x,y)=3,f_1(x,y)=0,f_2(x,y)=2x,\tag{8}$$

$$S_n=f_n(P,Q)\quad(n\in\mathbf{N}).\tag{9}$$

多项式列 $\{f_n(x,y)\}_{n\in\mathbf{N}}$ 满足递推关系式

$$f_{n+3}(x,y)=xf_{n+1}(x,y)+yf_n(x,y)\quad(n\in\mathbf{N}).\tag{10}$$

递推可得 (简记 $f_n(x,y)$ 为 f_n):

$$
\begin{aligned}
& f_3=3y, f_4=2x^2, f_5=5xy, f_6=2x^3+3y^2, f_7=7x^2y, \\
& f_8=2x^4+8xy^2, f_9=9x^3y+3y^3, f_{10}=2x^5+15x^2y^2, \\
& f_{11}=11x^4y+11xy^3, f_{12}=2x^6+24x^3y^2+3y^4, \\
& f_{13}=13x^5y+26x^2y^3, f_{14}=2x^7+35x^4y^2+14xy^4, \\
& f_{15}=15x^6y+50x^3y^3+3y^5, f_{16}=2x^8+48x^5y^2+40x^2y^4, \\
& f_{17}=17x^7y+85x^4y^3+17xy^5, \\
& f_{18}=2x^9+63x^6y^2+90x^3y^4+3y^6, \\
& f_{19}=19x^8y+133x^5y^3+57x^2y^5, \\
& f_{20}=2x^{10}+80x^7y^2+175x^4y^4+20xy^6, \cdots
\end{aligned} \tag{11}
$$

其具有性质:

$$1^\circ\, f_n \text{ 的各项系数均为正整数, 且均与 } n \text{ 不互质 } (n \geqslant 2)\,; \tag{12}$$

$$2^\circ\, f_n \text{ 的首项系数 } = \begin{cases} 2 & (n\text{ 为偶数})\,, \\ n & (n\text{ 为奇数})\,, \end{cases} \quad n \geqslant 2; \tag{13}$$

$$3^\circ\, f_n \text{ 的末项系数 } = \begin{cases} 3 & (n\text{ 为 } 3 \text{ 的倍数})\,, \\ n & (n\text{ 为 } 3 \text{ 的倍数减 } 1)\,; \end{cases} \tag{14}$$

$$4^\circ\, f_p \text{ 的各项系数均为 } p \text{ 的倍数 } (p\text{ 为质数})\,. \tag{15}$$

§2. 特征根和为 0 的三元幂和式方程

说明

文 [1][2][3][4][5][6] 中的 SSMJ 问题 5697, 推广 A∼N, 均属于特征根和为 0 的三元幂和式方程与方程组, 又分在实数与复数范围内求解两种情形, 如

$$
\begin{aligned}
& S_5=0, S_7=0, 2S_8-S_4^2=0, \\
& 9S_9-S_3^3=0, 16S_{10}-S_2^5=0, \\
& 22S_{13}-13S_2S_{11}=0, \cdots
\end{aligned} \tag{1}
$$

其中 a,b,c 均为 x 的多项式:

$$a=a\left(x\right),b=b\left(x\right),c=c\left(x\right) \tag{2}$$

(对于方程组而言, 则改为 x,y 或 x,y,z 的多项式等等). 这种方程(组) 的特点是可转化为 P,Q 的代数方程.

§3. 特征根和为 0 的四元幂和式数列

概要

四元幂和式数列 $\{S_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ 的通项公式是

$$S_n=a^n+b^n+c^n+d^n\quad\left(a,b,c,d\in\mathbf{C},n\in\mathbf{N}\right), \tag{1}$$

其中 a,b,c,d 称为特征根. 当

$$a+b+c+d=0 \tag{2}$$

时, $\{S_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ 满足常系数线性齐次 4 阶递推关系式

$$S_{n+4}=PS_{n+2}+QS_{n+1}+RS_n\quad\left(n\in\mathbf{N}\right), \tag{3}$$

$$S_0=4,S_1=0,S_2=2P,S_3=3Q, \tag{4}$$

$$\begin{aligned}&P=-\left(ab+ac+ad+bc+bd+cd\right),\\&Q=abc+abd+acd+bcd,\\&R=-abcd,\end{aligned} \tag{5}$$

$-P,Q,-R$ 为 a,b,c,d 的初等对称多项式组中的末三个多项式. 存在三元多项式 $g_n\left(x,y,z\right)$, 满足

$$g_n\left(x,y,z\right)=\sum_{\substack{2i+3j+4k=n\\i,j,k\in\mathbf{N}}}q_{i,j,k}x^iy^iz^k\quad\left(n\in\mathbf{N},n\geqslant 2\right), \tag{6}$$

$$\begin{aligned}&g_0\left(x,y,z\right)=4,g_1\left(x,y,z\right)=0,\\&g_2\left(x,y,z\right)=2x,g_3\left(x,y,z\right)=3y,\end{aligned} \tag{7}$$

$$S_n=g_n\left(P,Q,R\right)\quad\left(n\in\mathbf{N}\right). \tag{8}$$

多项式列 $\{g_n\left(x,y,z\right)\}_{n\in\mathbf{N}}$ 满足递推关系式

$$\begin{aligned}g_{n+4}\left(x,y,z\right)=&\,xg_{n+2}\left(x,y,z\right)+yg_{n+1}\left(x,y,z\right)\\&+zg_n\left(x,y,z\right)\quad\left(n\in\mathbf{N}\right).\end{aligned} \tag{9}$$

递推可得 (简记 $g_n(x,y,z)$ 为 g_n):

$$\begin{aligned}
&g_4=2x^2+4z, g_5=5xy, g_6=2x^3+6xz+3y^2,\\
&g_7=7x^2y+7yz, g_8=2x^4+8x^2z+8xy^2+4z^2,\\
&g_9=9x^3y+18xyz+3y^3,\\
&g_{10}=2x^5+10x^3z+15x^2y^2+10xz^2+10y^2z,\\
&g_{11}=11x^4y+33x^2yz+11xy^3+11yz^2,\\
&g_{12}=2x^6+12x^4z+24x^3y^2+18x^2z^2+36xy^2z+3y^4+4z^3,\\
&g_{13}=13x^5y+52x^3yz+26x^2y^3+39xyz^2+13y^3z,\cdots
\end{aligned}\tag{10}$$

其具有性质:

$$1^\circ g_n \text{ 的各项系数均为正整数, 且均与 } n \text{ 不互质 } (n\geqslant 2); \tag{11}$$

$$2^\circ g_n \text{ 的首项系数 } =\begin{cases}2 & (n\text{ 为偶数}),\\ n & (n\text{ 为奇数}),\end{cases}\quad n\geqslant 2; \tag{12}$$

$$3^\circ g_n \text{ 的末项系数 } =\begin{cases}4 & (n\text{ 为 } 4 \text{ 的倍数}),\\ n & (n\text{ 为 } 4 \text{ 的倍数减 } 1);\end{cases} \tag{13}$$

$$4^\circ g_p \text{ 的各项系数均为 } p \text{ 的倍数 } (p\text{ 为质数}). \tag{14}$$

§4. 特征根和为 0 的四元幂和式方程

导言

根据构造特征根和为 0 的三元幂和式方程的方法, 笔者编拟与解答如下四元幂和式方程, 仍作为 SSMJ 问题 5697 的推广问题, 总体来说, 此时难度加大, 特别是在复数范围内求解的时候.

问题 5697O.

在实数范围内求解方程

$$\left(x^2+x+1\right)^5+(x-1)^5-(x+1)^5-\left(x^2+x-1\right)^5=0. \tag{1}$$

解析

解: 令

$$a=x^2+x+1, b=x-1, c=-x-1, d=-x^2-x+1, \tag{2}$$

诸记号如第 3 节所示, 则方程 (1) 为

$$S_5=0\Rightarrow PQ=0\Rightarrow Q=0. \tag{3}$$

这是因为

$$P=0\Rightarrow a^2+b^2+c^2+d^2=0\Rightarrow a=b=c=d=0, \text{无解}. \tag{4}$$

易得

$$\begin{aligned} Q=0\Rightarrow S_3=0&\Rightarrow \left(a^3+d^3\right)+\left(b^3+c^3\right)=0\\ &\Rightarrow 2\left[3\left(x^2+x\right)^2+1\right]-2\left(3x^2+1\right)=0\\ &\Rightarrow x^3(x+2)=0\Rightarrow x=0\,(3\ \text{重根}), -2. \end{aligned} \tag{5}$$

故原方程有 4 个实根, 如 (5). □

问题 5697P.

在实数范围内求解方程

$$\begin{aligned}&10\left[\left(x^2+x+1\right)^7+(x-1)^7-(x+1)^7-\left(x^2+x-1\right)^7\right]\\ &-7\left[\left(x^2+x+1\right)^2+(x-1)^2+(x+1)^2+\left(x^2+x-1\right)^2\right]\cdot\\ &\left[\left(x^2+x+1\right)^5+(x-1)^5-(x+1)^5-\left(x^2+x-1\right)^5\right]=0.\end{aligned} \tag{6}$$

解析

解: 同上题. 方程 (6) 为

$$\begin{aligned}&10S_7-7S_2S_5=0\Rightarrow 10\left(7P^2Q+7QR\right)-7\cdot 2P\cdot 5PQ=0\\ &\Rightarrow QR=0\Rightarrow x=0\,(3\ \text{重根}), -2, \pm 1, \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.\end{aligned} \tag{7}$$

故原方程有 8 个实根, 如 (7). □

问题 5697Q.

设 $A=x(x+1)$, $B=x(x-1)$, 在实数范围内求解关于 x

的方程

$$1^\circ\ (A+1)^5+(B-1)^5 - (B+1)^5-(A-1)^5=0. \tag{8}$$

$$2^\circ\ 10\Big[(A+1)^7+(B-1)^7-(B+1)^7-(A-1)^7\Big] - 7\Big[(A+1)^2+(B-1)^2+(B+1)^2+(A-1)^2\Big] \cdot\Big[(A+1)^5+(B-1)^5-(B+1)^5-(A-1)^5\Big]=0. \tag{9}$$

解析

简解: 如第 3 节所示, 改令

$$a=A+1, b=B-1, c=-B-1, d=-A+1. \tag{10}$$

易见方程 (8), (9) 为

$$S_5=0\Rightarrow PQ=0\Rightarrow Q=0\Rightarrow S_3=0 \Rightarrow x^3=0\Rightarrow x=0\,(3\text{ 重根})\,; \tag{11}$$

$$10S_7-7S_2S_5=0\Rightarrow QR=0 \Rightarrow x=0\,(3\text{ 重根})\,,\frac{1\pm\sqrt{5}}{2},\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}. \tag{12}$$

(补充: $P=0\Rightarrow a^2+b^2+c^2+d^2=0\Rightarrow a=b=c=d=0$, 无解)

方程 (8) 有 3 个实根, 如 (11); 方程 (9) 有 7 个实根, 如 (12). □

问题 5697R.

在实数范围内求解方程

$$180\Big[(x-1)^9-(x+2)^9+(x-3)^9-(x-6)^9\Big] - 81\Big[(x-1)^2+(x+2)^2+(x-3)^2+(x-6)^2\Big]^2\cdot \Big[(x-1)^5-(x+2)^5+(x-3)^5-(x-6)^5\Big] - 20\Big[(x-1)^3-(x+2)^3+(x-3)^3-(x-6)^3\Big]^3=0. \tag{13}$$

解析

解: 令

$$a=x-1, b=-x-2, c=x-3, d=-x+6, \tag{14}$$

则如第 3 节所示, 方程 (13) 为

$$
\begin{aligned}
& 180S_9 - 81S_2^2S_5 - 20S_3^3 = 0 \\
\Rightarrow\ & 180\left(9P^3Q + 3Q^3 + 18PQR\right) - 81\,(2P)^2 \cdot 5PQ - 20\,(3Q)^3 = 0 \\
\Rightarrow\ & PQR = 0 \Rightarrow QR = 0. \qquad (15)
\end{aligned}
$$

又

$$
\begin{aligned}
Q = 0 &\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 0 \\
&\Rightarrow (x-1)^3 - (x+2)^3 + (x-3)^3 - (x-6)^3 = 0 \\
&\Rightarrow 180 - 90x = 0 \Rightarrow x = 2. \qquad (16) \\
R = 0 &\Rightarrow abcd = 0 \Rightarrow x = 1, -2, 3, 6. \qquad (17)
\end{aligned}
$$

综合得原方程有 5 个实根, 如 (16), (17). □

问题 5697S.

在复数范围内求解方程 (13).

解析

简解: 同上题, 有

$$
\begin{aligned}
P = 0 &\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0 \\
&\Rightarrow 2x^2 - 8x + 25 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{34}\mathrm{i}}{2}. \qquad (18)
\end{aligned}
$$

因此原方程有 7 个复根, 如 (16), (17), (18). □

评论: (1), (6), (8), (9), (13) 分别为 8, 10, 7, 11, 7 次代数方程.

参考文献

[1] 张云勇. Proposed Solution to #5697 SSMJ[J]. “许康华竞赛优学”公众号, 2022-12-05.

[2] 吴 康. SSMJ 问题 5697 的求解与推广 [J]. “数学风”公众号, 2022-12-06.

[3] 吴 康. SSMJ 问题 5697 的进一步推广 [J]. “数学风”公众号, 2022-12-09.

[4] 吴 康. 把 SSMJ 问题 5697 推广到幂和式方程组 [J]. “数学风”公众号, 2022-12-13.

[5] 吴 康. 利用单位根推广 SSMJ 问题 5697[J]. “数学风”公众号, 2022-12-16.

[6] 吴 康. 把 SSMJ 问题 5697 推广到复系数幂和式方程 [J]. “数学风”公众号, 2022-12-18.

数 学 风

作者简介

吴 康（1957～ ），男，广东高州人。华南师范大学原教学督导，数学科学学院副教授、《中学数学研究》原主编。首批中国数学奥林匹克高级教练，高校竞赛数学课程首位主讲，首批数学国家集训队教练。全国初等数学研究会理事长，广东省初等数学学会创会会长、名誉会长，广东省高考研究会创会理事长，中国高等教育学会教育数学专业委员会副理事长，原丘成桐中学数学奖南部赛区组委会主任，广东省教育系统棋类协会常务副会长。荣获全国初等数学研究突出贡献奖、广西壮族自治区科技进步奖一等奖、广东省高等教育教学成果一等奖。

（2022 年 8 月）