数恋教情

教育部四省联考数学题 19 的进一步推广

华南师范大学 吴 康

§1. 题 19 与 19A

导言

教育部四省联考 (2023-02-23) 数学 [1] 题 19:

19.

(12 分) 记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 T_n, 且 $a_1=1$, $a_n=T_{n-1}\,(n\geqslant 2)$.
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 设 m 为整数, 且对任意 $n\in\mathbb{N}^*$, $m\geqslant \dfrac{1}{a_1}+\dfrac{2}{a_2}+\cdots+\dfrac{n}{a_n}$, 求 m 的最小值.

导言

文 [2] 中笔者给出题 19 的解答并推广至题 19A:

19A.

记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 T_n, 且 $a_1=1$, $a_n=T_{n-1}\,(n\geqslant 2)$.
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 设 m 为实数, $m\geqslant P_n=\dfrac{1^2}{a_1}+\dfrac{2^2}{a_2}+\cdots+\dfrac{n^2}{a_n}\,(n\in\mathbb{N}^*)$, 求 m 的最小值.

导言

文 [2] 采用待定系数法、等比 (数列) 解法、构造性解题方法、求极限等, 求解题 19 与 19A.

§2. 题 19B 与简解

19B.

记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 T_n, 且 $a_1=1$, $a_n=T_{n-1}\,(n\geqslant 2)$.
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 设 m 为实数, $m\geqslant V_n=\dfrac{1^3}{a_1}+\dfrac{2^3}{a_2}+\cdots+\dfrac{n^3}{a_n}\,(n\in\mathbb{N}^*)$, 求 m 的最小值.

解析

简解: (1) 见 [2].

$$a_n=1\,(n=1)\text{ 或 }2^{n-2}\,(n\geqslant 2)\,. \tag{1}$$

(2) $V_1=1,\ V_2=9,\ V_{n+1}=V_n+\dfrac{(n+1)^3}{2^{n-1}}\,(n\geqslant 1)$

$$\xRightarrow{\text{令 } W_n=2^nV_n} W_{n+1}=2W_n+4n^3+12n^2+12n+4\,(n\geqslant 1)\,, W_1=2. \tag{2}$$

令 $W_n+xn^3+yn^2+zn+u=\overline{W_n}$, 且 $\overline{W_{n+1}}=2\overline{W_n}$, 可解得

$$x=4, y-3x=12, z-2y-3x=12, u-z-y-x=4$$
$$\Longrightarrow (x,y,z,u)=(4,24,72,104)\,. \tag{3}$$

故 $\{\overline{W_n}\}$ 为等比数列, 通项

$$\overline{W_n}=2^{n-1}\overline{W_1}\Longrightarrow W_n=103\cdot 2^n-\left(4n^3+24n^2+72n+104\right)$$
$$\Longrightarrow V_n=103-\frac{n^3+6n^2+18n+26}{2^{n-2}}, n\geqslant 1. \tag{4}$$

由 $m \geqslant V_n\,(n\in\mathbb{N}^*)$ 易得

$$m_{\min}=\lim_{n\to\infty}V_n=103.\quad\square \tag{5}$$

§3. 题 19C 与简解

19C.

记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 T_n, 且 $a_1=1,\ a_n=2T_{n-1}-1\,(n\geqslant 2)$.
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 设 m 为实数, $m\geqslant X_n=\dfrac{1\times2\times3}{a_1}+\dfrac{2\times3\times4}{a_2}+\cdots+\dfrac{n\,(n+1)\,(n+2)}{a_n}\,(n\in\mathbb{N}^*)$, 求 m 的最小值.

解析

简解: (1) $a_1=1,\ a_2=2T_1-1=1$,

$$\begin{aligned}&a_{n+1}-a_n=2T_n-2T_{n-1}=2a_n\\ \Longrightarrow\ &a_{n+1}=3a_n\,(n\geqslant2)\Longrightarrow a_n=1\,(n=1)\text{ 或 }3^{n-2}\,(n\geqslant2)\,.\end{aligned} \tag{1}$$

(2) $X_1=6,\ X_2=30,\ X_{n+1}=X_n+\dfrac{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}{3^{n-1}}$

$$\xRightarrow{\text{令 } Y_n=3^nX_n} Y_{n+1}=3Y_n+9n^3+54n^2+99n+54\,(n\geqslant1)\,,Y_1=3. \tag{2}$$

令 $Y_n+xn^3+yn^2+zn+u=\overline{Y_n}$, 且 $\overline{Y_{n+1}}=3\overline{Y_n}$, 可解得

$$\begin{aligned}&2x=9,2y-3x=54,2z-2y-3x=99,2u-z-y-x=54\\ \Longrightarrow\ &(x,y,z,u)=\left(\frac92,\frac{135}{4},90,\frac{729}{8}\right).\end{aligned} \tag{3}$$

故 $\{\overline{Y_n}\}$ 为等比数列, 通项

$$\begin{aligned}&\overline{Y_n}=3^{n-1}\overline{Y_1}\\ \Longrightarrow\ &Y_n=\frac{593}{8}\cdot3^n-\left(\frac92n^3+\frac{135}{4}n^2+90n+\frac{729}{8}\right)\\ \Longrightarrow\ &X_n=\frac{593}{8}-\frac{4n^3+30n^2+80n+81}{8\cdot3^{n-2}},n\geqslant1.\end{aligned} \tag{4}$$

由 $m\geqslant X_n\,(n\in\mathbb{N}^*)$ 易得

$$m_{\min}=\lim_{n\to\infty}X_n=\frac{593}{8}.\quad\square \tag{5}$$

§4. 题 19D 与简解

19D.

记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 T_n, 且 $a_1=1,\ a_n=T_{n-1}+2^{n-1}-1\,(n\geqslant2)$.
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 设 m 为实数, $m\geqslant F_n=\dfrac{1^2}{a_1}+\dfrac{2^2}{3a_2}+\dfrac{3^2}{3^2a_3}+\dfrac{4^2}{3^3a_4}+\cdots+\dfrac{n^2}{3^{n-1}a_n}\,(n\in\mathbb{N}^*)$, 求 m 的最小值.

解析

简解: (1) $a_1=1,\ a_2=T_1+2-1=2,\ a_{n+1}-a_n=(T_n+2^n-1)-\left(T_{n-1}+2^{n-1}-1\right)=a_n+2^{n-1}$
$\Longrightarrow a_{n+1}=2a_n+2^{n-1}\,(n\geqslant2)$. 令 $a_{n+1}+p\,(n+1)\,2^{n+1}=2\,(a_n+pn\cdot2^n)\,(n\geqslant2)$, 可解得 $p=-\dfrac14$. 故 $a_{n+1}-(n+1)\cdot2^{n-1}=2\left(a_n-n\cdot2^{n-2}\right)$, $\{a_n-n\cdot2^{n-2}\}_{n\geqslant2}$ 为等比数列, 通项

$$\begin{aligned}&a_n-n\cdot2^{n-2}=2^{n-2}\left(a_2-2\cdot2^{2-2}\right)=0\\ \Longrightarrow\ &a_n=n\cdot2^{n-2}\,(n\geqslant2)\,.\end{aligned} \tag{1}$$

所求通项公式为

$$a_n=1\,(n=1)\text{ 或 }n\cdot2^{n-2}\,(n\geqslant2)\,. \tag{2}$$

(2) $F_1=1,\ F_2=\dfrac{5}{3}$,

$$F_{n+1}=F_n+\frac{(n+1)^2}{3^n a_{n+1}}\Longrightarrow F_{n+1}=F_n+\frac{2(n+1)}{6^n}$$

$$\xRightarrow{令\,G_n=6^nF_n} G_{n+1}=6G_n+12n+12\,(n\geqslant 1)\,,G_1=6. \tag{3}$$

令 $G_n+x(n+1)+y=\overline{G_n}$, 且 $\overline{G_{n+1}}=6\overline{G_n}$, 可解得

$$5x=12,5y-x=12\Longrightarrow (x,y)=\left(\frac{12}{5},\frac{72}{25}\right). \tag{4}$$

故 $\{\overline{G_n}\}$ 为等比数列, 通项

$$\begin{aligned}&\overline{G_n}=6^{n-1}\overline{G_1}\\ \Longrightarrow\ &G_n=\frac{47}{25}\cdot 6^n-\left(\frac{12}{5}n+\frac{72}{25}\right)\\ \Longrightarrow\ &F_n=\frac{47}{25}-\frac{10n+12}{25\cdot 6^{n-1}},n\geqslant 1.\end{aligned} \tag{5}$$

由 $m\geqslant F_n\,(n\in\mathbb{N}^*)$ 易得

$$m_{\min}=\lim_{n\to\infty}F_n=\frac{47}{28}.\quad\square \tag{6}$$

§5. 评论

表 1　题 19 和推广题 A, B, C, D 比较

	题 19	题 19A	题 19B	题 19C	题 19D
难度	中等	稍难	较难	高难	较难
繁度	中等	稍繁	较繁	超繁	较繁
计算量	中等	稍大	较大	特大	较大
表达量	中等	稍大	较大	较大	较大
适用场合	高考中档题	高考难题	高考高难题	竞赛中档题	竞赛中档题

参考文献

[1] 教育部教育考试院. 安徽, 云南, 吉林, 黑龙江联考 (20230223) 老高考新课标适应性测试数学试题与参考答案 [J]. “平说数学”公众号, 2023-02-24.

[2] 吴　康. 教育部四省联考数学题 19 解与推广 [J]. “数学风”公众号, 2023-02-24.

(2023-02-26 于广州)