数恋教情

教育部四省联考数学题 19 解与推广

华南师范大学 吴 康

§1. 题 19 的解答

导言

教育部四省联考 (2023-02-23) 数学 [1] 题 19:

19.

(12 分) 记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 T_n, 且 $a_1=1$, $a_n=T_{n-1}\,(n\geqslant 2)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 m 为整数, 且对任意 $n\in\mathbb{N}^*$, $m\geqslant \frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_2}+\cdots+\frac{n}{a_n}$, 求 m 的最小值.

解析

解: (1) $a_1=1=T_1$, $a_2=T_1=1$, $a_3=T_2=a_1+a_2=2$, $a_4=T_3=T_2+a_3=4$, $\cdots$, 易得 $a_n=2^{n-2}\,(n\geqslant 2)$, 故所求通项公式为

$$a_n=1\,(n=1)\text{ 或 }2^{n-2}\,(n\geqslant 2)\,. \tag{1}$$

(2) 设 $S_n=\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_2}+\cdots+\frac{n}{a_n}$, $n\in\mathbb{N}^*$, 则 $S_1=1$, 且易得

$$S_{n+1}=S_n+\frac{n+1}{2^{n-1}}\,(n\geqslant 1)\,. \tag{2}$$

两边乘 2^{n+1}, 并令 $U_n=2^nS_n\,(n\geqslant 1)$, 即得

$$U_{n+1}=2U_n+4n+4\;\;(n\geqslant 1)\,, U_1=2 \tag{3}$$

$$\Longrightarrow U_{n+1}+4\,(n+1)+8=2\,(U_n+4n+8)\,,\quad n\geqslant 1, \tag{4}$$

故 $\{U_n+4n+8\}$ 为等比数列, 通项

$$U_n+4n+8=2^{n-1}\,(U_1+4+8)\Longrightarrow U_n=7\cdot 2^n-4n-8 \tag{5}$$

$$\Longrightarrow S_n=7-\frac{n+2}{2^{n-2}},\quad n\geqslant 1. \tag{6}$$

因 m 为整数且 $m\geqslant S_n\,(n\in\mathbb{N}^*)$, 而 $7>S_n\,(n\in\mathbb{N}^*)$ 且 $m\geqslant S_6=6.5$, 故所求

$$m_{\min}=7.\quad\square \tag{7}$$

评论: (4) 式可用待定系数法确定, 详略. “m 为整数”可改为“m 为实数”, 结论仍成立. “$m\geqslant S_n$”可改为“$m>S_n$”, 结论仍成立.

§2. 题 19 的推广

19A.

记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 T_n, 且 $a_1=1$, $a_n=T_{n-1}\,(n\geqslant 2)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 m 为实数, $m\geqslant P_n=\frac{1^2}{a_1}+\frac{2^2}{a_2}+\cdots+\frac{n^2}{a_n}\,(n\in\mathbb{N}^*)$, 求 m 的最小值.

解析

解: (1) 同上.

(2) $P_1=1$, $P_2=1+4=5$, 易得

$$P_{n+1}=P_n+\frac{(n+1)^2}{2^{n-1}}\quad(n\geqslant 1)\,. \tag{1}$$

两边乘 2^{n+1}, 并令 $Q_n=2^nP_n\,(n\geqslant 1)$, 即得

$$Q_{n+1}=2Q_n+4n^2+8n+4\ \ (n\geqslant 1)\,,Q_1=2 \tag{2}$$

$$\Longrightarrow Q_{n+1}+4\,(n+1)^2+16\,(n+1)+24=2\left(Q_n+4n^2+16n+24\right),n\geqslant 1, \tag{3}$$

故 $\left\{Q_n+4n^2+16n+24\right\}$ 为等比数列, 通项

$$Q_n+4n^2+16n+24=2^{n-1}\,(Q_1+4+16+24)$$

$$\Longrightarrow Q_n=23\cdot 2^n-4n^2-16n-24$$

$$\Longrightarrow P_n=23-\frac{n^2+4n+6}{2^{n-2}},\quad n\geqslant 1. \tag{4}$$

因 m 为实数, 且 $m\geqslant P_n\,(n\in\mathbb{N}^*)$, $\{P_n\}$ 是严格递增数列, $\{P_n\}$ 有上界 23, 且显然 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n=23$, 故题目所求

$$m_{\min}=23.\quad\square \tag{5}$$

评论: (3) 式可用待定系数法确定——令

$$Q_{n+1}+x\,(n+1)^2+y\,(n+1)+z=2\left(Q_n+xn^2+yn+z\right),$$

化简得

$$Q_{n+1}=2Q_n+xn^2+(y-2x)\,n+(z-y-x)$$

$$\Longrightarrow x=4,y-2x=8,z-y-x=4$$

$$\Longrightarrow\ (x,y,z)=(4,16,24)\,. \tag{6}$$

另外, 把“$m\geqslant P_n$”改为“$m>P_n$”, 结论仍成立.

参考文献

[1] 教育部教育考试院. 安徽, 云南, 吉林, 黑龙江联考 (20230223) 老高考新课标适应性测试数学试题与参考答案 [J]. “平说数学”公众号, 2023-02-24.