



Language: Chinese (Simplified)

Day: 1

2023 年 4 月 15 日, 周六

题目 1. 给定整数 $n \geq 3$ 和 n 个正实数 a_1, a_2, \dots, a_n . 对每个 $i = 1, 2, \dots, n$, 记 $b_i = \frac{a_{i-1} + a_{i+1}}{a_i}$ (这里, 我们约定 $a_0 = a_n, a_{n+1} = a_1$). 假设对所有 $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, 都有 $a_i \leq a_j$ 当且仅当 $b_i \leq b_j$.

证明: $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

题目 2. 设 D 是锐角三角形 ABC 外接圆上一点使得 AD 为直径. 设点 K 和点 L 分别在线段 AB 和 AC 上, 满足 DK 和 DL 都与三角形 AKL 的外接圆相切.

证明: 三角形 ABC 的垂心在直线 KL 上.

注: 三角形的垂心是三角形三条高线的交点.

题目 3. 给定正整数 k . 一个间谍的密码本 \mathcal{D} 上写有若干只由字母 A 和 B 组成的长度为 k 个字母的字符串. 间谍希望在 $k \times k$ 的方格表中每个方格内填上字母 A 或 B , 使得每一列从上到下读恰好是 \mathcal{D} 中的某个字符串, 且每一行从左到右读也是 \mathcal{D} 中的某个字符串.

求最小的正整数 m 满足: 只要 \mathcal{D} 中含有至少 m 个不同的字符串, 不论含有的是哪些字符串, 间谍一定可以按上述要求填好方格表.

Language: Chinese (simplified)

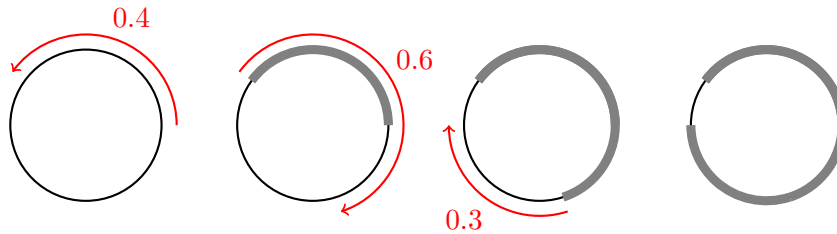
时间: 4 小时 30 分钟
每题 7 分

考试题目在 4 月 16 日 22:00 UTC (00:00 (周一) 欧洲中部夏令时) 前请保密.

2023 年 4 月 16 日, 周日

题目 4. 极速蜗牛开始时站在周长为 1 的圆周上某一点. 对指定的无穷正实数序列 c_1, c_2, c_3, \dots , 蜗牛依次绕着圆周爬行距离 c_1, c_2, c_3, \dots , 每一次爬行的方向要么是顺时针要么是逆时针.

例如, 如果指定的序列 c_1, c_2, c_3, \dots 是 $0.4, 0.6, 0.3, \dots$, 那么蜗牛可以按如下方式爬行:



求满足下述条件的最大的正实数 C : 对任一正实数序列 c_1, c_2, c_3, \dots , 若对所有 i 都有 $c_i < C$, 则蜗牛 (在研究过整个序列之后) 可以保证存在圆周上的某一点, 它永远也不会到达或者经过该点.

题目 5. 给定整数 $s \geq 2$. 对任一正整数 k , 定义它的转换 k' 如下: 将 k 表示为 $as + b$, 这里 a, b 是非负整数且 $b < s$, 则 $k' = bs + a$. 对正整数 n , 考虑无穷序列 d_1, d_2, \dots 满足 $d_1 = n$ 且对所有正整数 i , d_{i+1} 是 d_i 的转换.

证明: 此序列中包含 1 当且仅当 n 除以 $s^2 - 1$ 的余数是 1 或者 s .

题目 6. 记三角形 ABC 的外接圆为 Ω . 设 S_b 和 S_c 分别为弧 \widehat{AC} 和弧 \widehat{AB} (不含三角形第三个顶点的一侧) 的中点. 设 N_a 为弧 \widehat{BAC} (含 A 一侧的弧 \widehat{BC}) 的中点. 记 I 为三角形 ABC 的内心. 设 ω_b 是与 AB 相切且在点 S_b 处内切于圆 Ω 的圆, ω_c 是与 AC 相切且在点 S_c 处内切于圆 Ω 的圆. 证明: 直线 IN_a 和通过圆 ω_b 与圆 ω_c 交点的直线相交于圆 Ω 上某点.

三角形的内心是三角形内切圆 (三角形内部的与三边都相切的圆) 的圆心.