# 第十一届学而思数学竞赛联考

## 第一试

### 一、填空题 (本大题共 8 小题, 每小题 8 分, 共 64 分)

**题 11.1**

方程 $2\log_2(x-2)+\log_2(x+1)=1$ 的所有实数解为 $x=$ ________.

**题 11.2**

已知实数 $k\in\mathbf{R}$, 平面上的向量 $\left|\vec{b}\right|=1$, 若满足 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的夹角为 $150^\circ$, 且 $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\perp\left(\vec{a}+k\vec{b}\right)$ 的非零向量 $\vec{a}$ 恰好有两个, 则实数 $k$ 的取值范围为 ________.

**题 11.3**

已知正实数 $a,b,c$ 依次构成等比数列, 并恰好是 $\triangle ABC$ 的三边长, 则 $\dfrac{a+c}{b}$ 的取值范围是 ________.

**题 11.4**

已知 $F$ 为椭圆 $C:\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 的右焦点, $P$ 为 $C$ 上一点, $Q(7,8)$, 则 $|PF|+|PQ|$ 的取值范围是 ________.

**题 11.5**

如图 11.1, 对于正实数 $r\,(1<r<\sqrt{2})$, 以点 $A$ 为球心, 半径为 $r$ 的球面与单位立方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱产生 6 个交点, 不难发现这六个点在同一个平面上. 则这六个点构成的凸六边形的面积与周长的比值的取值范围是 ________.

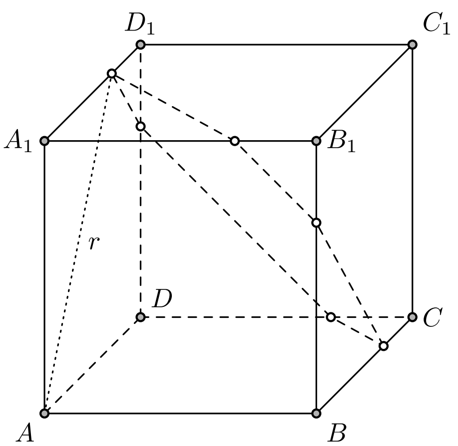


图 11.1

**题 11.6**

设集合 $A=\left\{x\mid ax^2+3x-2a=0\right\}$ (其中 $a$ 为实常数); 集合 $B=\left\{x\mid 2x^2-5x-42\leqslant 0\right\}$, 如果 $A\cap B=A$, 则参数 $a$ 的取值范围是 ________.

**题 11.7**

多项式 $\left(1+x+x^2+\cdots+x^{203}\right)^3$ 的展开式在合并同类项以后, $x^{300}$ 这一项的系数为 ________.

**题 11.8**

从 $4\times 4$ 的方格表中随机选 5 个不同的方格, 则选出的 5 个方格构成连通区域的概率是 ________.

**注**: 连通区域是指, 对于区域内部 (不含边界) 任意两点, 均存在一条完全落在区域内部 (不含边界) 的折线连接这两个点.

## 二、解答题 (本大题共 3 小题, 第 9 题 16 分, 第 10, 11 题各 20 分, 共 56 分)

**题 11.9 (16 分)**

已知 $x, y \in \mathbf{R}$, 且满足 $\left(4x^3-3x\right)^2+\left(4y^3-3y\right)^2=1$. 求 $x+y$ 的最大值.

**题 11.10 (20 分)**

设复数 $x, y, z$ 满足: $|x|=|y|=|z|=1$, 并且 $\dfrac{t}{y}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}$, 其中 $t \in \mathbf{C}$ 为给定的复数. 求 $\left|\dfrac{2xy+2yz+3xz}{x+y+z}\right|$ 的值 (用含 $t$ 的代数式表示).

**题 11.11 (20 分)**

设 $p$ 为给定的正整数, 点 $F$ 是抛物线 $\Gamma: y^2=2px$ 的焦点, 点 $S$ 在 $x$ 轴上, 且满足 $\overrightarrow{OS}=m\overrightarrow{OF}$, 其中 $m$ 是给定的正奇数; 设经过点 $S$ 且不与坐标轴垂直的动直线 $l$ 与抛物线 $\Gamma$ 交于 $A, B$ 两点, 线段 $AB$ 的中垂线与 $AB$ 以及 $x$ 轴分别交于 $M, T$ 两点, 记 $N$ 为线段 $MT$ 的中点, 点 $N$ 的轨迹记为 $\omega$.

(1) 确定 $\omega$ 的形状以及方程, 并证明: 在 $\omega$ 上存在无穷多个整点 (整点就是横纵坐标都是整数的点);

(2) 如果正整数 $p$ 满足: $p$ 的任意大于 1 的因数都不是完全平方数, 求证: $\omega$ 上的任意一个整点到原点 $O$ 的距离都不是整数.

# 第十一届学而思数学竞赛联考

## 加试

### 一、(本题满分 40 分)

**题 11.1**

如图 11.1, 设 $\triangle ABC$ 内接于圆 $\Gamma$, $\angle BAC$ 的角平分线与 $BC$ 交于点 $D$, $P$ 为线段 $AD$ 上一点, 直线 $BP$ 交 $AC$ 于点 $E$, 直线 $CP$ 交 $AB$ 于点 $F$, 设圆 $\Gamma$ 在点 $A$ 处的切线与直线 $EF$ 交于点 $Q$. 求证: $PQ \parallel BC$.

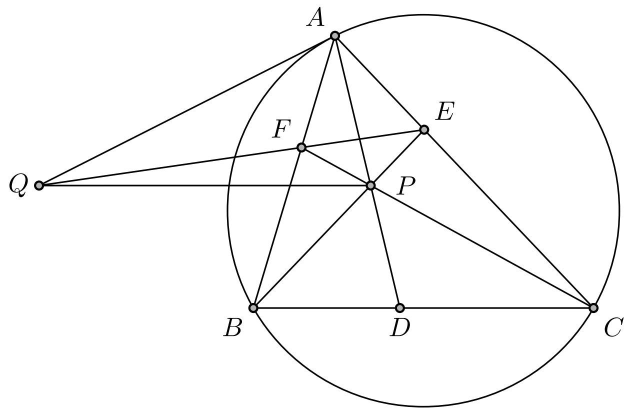


图 11.1

### 二、(本题满分 40 分)

**题 11.2**

已知 $a, b, c$ 为正实数, 且满足 $abc = 64$. 求证: $\displaystyle\sum_{cyc} \frac{a^2}{\sqrt{a^3+8}\sqrt{b^3+8}} \geqslant \frac{2}{3}$.

**三、(本题满分 50 分)**

**题 11.3**

已知 $p$ 为质数, 且 $p \equiv 2 \pmod 3$. 对于整数 $a$, 若

$$p \left| \prod_{i=1}^{p} \left(i^3 - ai - 1\right)\right.,$$

则称 $a$ 为咕咕数. 问: $\{1,2,\cdots,p\}$ 中有多少个咕咕数?

**四、(本题满分 50 分)**

**题 11.4**

对于一个边长为 $n$ 的蜂巢 (其中蜂巢是由若干个小的正六边形区域构成的大正六边形, 每个正六边形区域内各有一只蜜蜂; 蜂巢的边长为正六边形区域的圈数), 下面为 $n=2,3$ 时的情况示例 (如图 11.2).

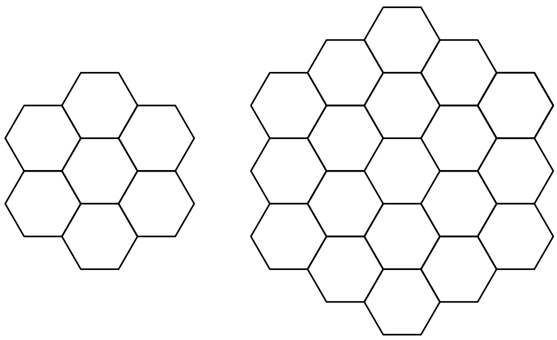

图 11.2

初始时刻有若干个正六边形区域内的蜜蜂感染病毒, 所有蜜蜂一旦感染就一直处于感染状态. 由于防疫措施非常到位, 某个未被感染的正六边形区域内的蜜蜂被感染, 当且仅当与它相邻的所有区域中至少有 5 只蜜蜂已经被感染.

已知最终所有的蜜蜂全部感染了病毒, 求初始时感染病毒的蜜蜂数目的最小可能值 $f(n)$.