数恋教情

“大炮打蚊子”与“蚊拍打蚊子”

——两个多项式复根求值问题的简解与推广

华南师范大学 吴 康

§ 1. 问题源起

著名数学公众号“恩次方根”主编程国根先生发文《一道复数求值问题的另解及推广》[1], 对以下问题 (本文称为问题 1) 给出一个“大炮打蚊子”般的解答.

问题 1.

设 a,b,c,d 是

$$f(x)=x^4-3x^3+2x^2+5x-4$$

的零点, 求

$$\left(a+1+\frac{1}{a}\right)\left(b+1+\frac{1}{b}\right)\left(c+1+\frac{1}{c}\right)\left(d+1+\frac{1}{d}\right)$$

的值.

文 [1] 的解法简述: 利用以下引理 1 ∼ 3 得到引理 4.

引理 1.

如果 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为 n 次多项式 $f(x)$ 的 n 个根, 即

$$f(x)=A(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n),$$

则

$$f\left(\varepsilon_0\sqrt[k]{x}\right)f\left(\varepsilon_1\sqrt[k]{x}\right)\cdots f\left(\varepsilon_{n-1}\sqrt[k]{x}\right)$$

为以 $x_1^k,x_2^k,\cdots,x_n^k$ 为 n 个根的 n 次多项式. 其中, $\varepsilon_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_{n-1}$ 为 $x^n=1$ 的 n 个复根.

引理 2.

设 A 是以 n 个复根 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为元素的 n 阶循环矩阵, 则

$$\det A=f(\varepsilon_0)f(\varepsilon_1)\cdots f(\varepsilon_{n-1}).$$

其中

$$f(x)=a_1+a_2x+\cdots+a_nx^{n-1}$$

为复数域上的 $n-1$ 次多项式, $\varepsilon_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_{n-1}$ 为 $x^n-1=0$ 的 n 个根.

引理 3.

任意多项式

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$$

可以唯一地表示为

$$f(x)=f_0\left(x^k\right)+xf_1\left(x^k\right)+\cdots+x^{k-1}f_{k-1}\left(x^k\right).$$

其中

$$
\begin{aligned}
f_0(x) &= a_0 + a_k x + a_{2k} x^2 + \cdots \\
f_1(x) &= a_1 + a_{k+1} x + a_{2k+1} x^2 + \cdots \\
&\cdots \\
f_{k-1}(x) &= a_{k-1} + a_{2k-1} x + a_{3k-1} x^2 + \cdots
\end{aligned}
$$

引理 4.

$$
\begin{aligned}
\prod_{j=0}^{k-1} f\left(\varepsilon_j \sqrt[k]{x}\right) &= \varphi(\varepsilon_0)\varphi(\varepsilon_1)\cdots\varphi(\varepsilon_{k-1}) \\
&= \begin{vmatrix}
f_0(x) & \sqrt[k]{x} f_1(x) & \cdots & \left(\sqrt[k]{x}\right)^{k-1} f_{k-1}(x) \\
\left(\sqrt[k]{x}\right)^{k-1} f_{k-1}(x) & f_0(x) & \cdots & \left(\sqrt[k]{x}\right)^{k-2} f_{k-2}(x) \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\sqrt[k]{x} f_1(x) & \left(\sqrt[k]{x}\right)^2 f_2(x) & \cdots & f_0(x)
\end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

其中

$$
\varphi(t) = f_0(x) + \sqrt[k]{x} f_1(x) \cdot t + \cdots + \left(\sqrt[k]{x}\right)^{k-1} f_{k-1}(x) \cdot t^{k-1}.
$$

由以上 4 个引理, 回到原题, 可得

$$
f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 5x - 4, \quad k = 3,
$$

$$
\begin{aligned}
f_0(x) &= -4 - 3x, \\
f_1(x) &= 5 + x, \\
f_2(x) &= 2,
\end{aligned}
$$

于是, 以 a^3, b^3, c^3, d^3 为根且首项系数和 $f(x)$ 相同 (即为 1) 的 4 次多项式

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \begin{vmatrix}
-4-3x & \sqrt[3]{x}(5+x) & \left(\sqrt[3]{x}\right)^2 \cdot 2 \\
\sqrt[3]{x}(5+x) & \left(\sqrt[3]{x}\right)^2 \cdot 2 & -4-3x \\
\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 \cdot 2 & -4-3x & \sqrt[3]{x}(5+x)
\end{vmatrix} \\
&= (-4-3x)^3 + \left(\sqrt[3]{x}(5+x)\right)^3 + \left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 \cdot 2\right)^3 - 3(-4-3x)\left(\sqrt[3]{x}(5+x)\right)\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 \cdot 2\right).
\end{aligned}
$$

而题目所求式子

$$
\begin{aligned}
U &= \left(a + 1 + \frac{1}{a}\right)\left(b + 1 + \frac{1}{b}\right)\left(c + 1 + \frac{1}{c}\right)\left(d + 1 + \frac{1}{d}\right) \\
&= \prod \frac{a^2 + a + 1}{a} = \frac{1}{abcd} \prod \frac{a^3 - 1}{a - 1} = \frac{1}{abcd} \cdot \frac{g(1)}{f(1)},
\end{aligned}
$$

且

$$
g(1) = (-7)^3 + 6^3 + 2^3 - 3 \cdot (-7) \cdot 6 \cdot 2 = 133,
$$

又 $f(1) = 1$, $abcd = -4$, 故

$$
U = \frac{1}{-4} \cdot \frac{133}{1} = -\frac{133}{4}.
$$

□

§2. 问题 1 简解

笔者给出利用因式定理的简捷解法.

解析

解法 2: 由因式定理

$$f\left(x\right)=\left(x-a\right)\left(x-b\right)\left(x-c\right)\left(x-d\right).$$

以 ω 表示 1 的 3 次虚根 $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$, $\overline{\omega}$ 表示其共轭复数, 则

$$\begin{aligned}U&=\left(a+1+\frac{1}{a}\right)\left(b+1+\frac{1}{b}\right)\left(c+1+\frac{1}{c}\right)\left(d+1+\frac{1}{d}\right)\\&=\prod\frac{a^2+a+1}{a}=\frac{1}{abcd}\prod\left(a^2+a+1\right)\\&=\frac{1}{-4}\prod\left[\left(a-\omega\right)\left(a-\overline{\omega}\right)\right]\\&=-\frac{1}{4}\prod\left(\omega-a\right)\prod\left(\overline{\omega}-a\right)\\&=-\frac{1}{4}f\left(\omega\right)f\left(\overline{\omega}\right).\end{aligned}$$

而

$$f\left(\omega\right)=\omega^4-3\omega^3+2\omega^2+5\omega-4=6\omega+2\overline{\omega}-7,$$

故

$$f\left(\overline{\omega}\right)=6\overline{\omega}+2\omega-7,$$

易算得

$$\begin{aligned}U&=-\frac{1}{4}\left(6\omega+2\overline{\omega}-7\right)\left(6\overline{\omega}+2\omega-7\right)\\&=-\frac{1}{4}\left[36+4+49+12\left(\omega^2+\overline{\omega}^2\right)-56\left(\omega+\overline{\omega}\right)\right]\\&=-\frac{1}{4}\left(89-12+56\right)=-\frac{133}{4}.\end{aligned}$$

□

§3. 又一类似问题

著名数学公众号“数学爱好者通讯”主编叶军教授发短文《叶军数学工作站第 233 期问题研究 A》[2], 给出类似的一个问题 (本文称为问题 2):

问题 2.

设

$$f\left(x\right)=x^{2023}-3x^3+2x^2+5x-4$$

的 2023 个零点依次为 $x_1,x_2,\cdots,x_{2023}$, 求值:

$$\prod_{i=1}^{2023}\left(1+x_i+x_i^{-1}\right).$$

笔者把问题 1, 2 推广为问题 3, 并按上节方法给出解答.

问题 3.

设 $n\in\mathbb{N}^+$, $n\geqslant 4$. 在复数范围内,

$$f\left(x\right)=x^n-3x^3+2x^2+5x-4$$

的 n 个零点依次为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$, 求值:

$$U_n=\prod_{i=1}^{n}\left(1+x_i+x_i^{-1}\right).$$

解析

解: 由因式定理

$$f(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-x_i),$$

故

$$\begin{aligned}U_n&=\prod_{i=1}^{n}\frac{x_i^2+x_i+1}{x_i}=\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{-1}\prod_{i=1}^{n}\left(x_i^2+x_i+1\right)\\&=\left[(-1)^n(-4)\right]^{-1}\left[\prod_{i=1}^{n}(\omega-x_i)\right]\left[\prod_{i=1}^{n}(\overline{\omega}-x_i)\right]\\&=\frac{(-1)^{n+1}}{4}f(\omega)f(\overline{\omega}).\end{aligned}$$

而

$$f(\omega)=\omega^n-3\omega^3+2\omega^2+5\omega-4=\omega^n+5\omega+2\overline{\omega}-7,$$

故

$$f(\overline{\omega})=\overline{\omega}^n+5\overline{\omega}+2\omega-7.$$

易算得

$$\begin{aligned}U_n&=\frac{(-1)^{n+1}}{4}\left(\omega^n+5\omega+2\overline{\omega}-7\right)\left(\overline{\omega}^n+5\overline{\omega}+2\omega-7\right)\\&=\frac{(-1)^{n+1}}{4}\Big[1+5\left(\omega^{n-1}+\overline{\omega}^{n-1}\right)+2\left(\omega^{n+1}+\overline{\omega}^{n+1}\right)-7\left(\omega^n+\overline{\omega}^n\right)\\&\quad+25+4+49+10\left(\omega^2+\overline{\omega}^2\right)-49\left(\omega+\overline{\omega}\right)\Big].\end{aligned}$$

整理易得 $\left(k\in\mathbb{N}^+\right)$

$$U_n=\begin{cases}(-1)^{k+1}\cdot\dfrac{97}{4}, & n=3k,k\geqslant 2;\\(-1)^{k}\cdot\dfrac{133}{4}, & n=3k+1,k\geqslant 1;\\(-1)^{k+1}\cdot 31, & n=3k+2,k\geqslant 1.\end{cases}$$

□

评论: 问题 1 的结果为 $U_4=-\dfrac{133}{4}$, 问题 2 的为 $U_{2023}=(-1)^{674}\cdot\dfrac{133}{4}=\dfrac{133}{4}$.

§4. 评论

"大炮打蚊子"通常指"大才小用"、"大材小用"、"小题大做"之贬义，但也可以反其道而用之! 能用大炮打中蚊子, 绝非寻常技艺! 客观地说, 问题 1 原解法虽复杂高深, 却别具匠心思维独特, 应在更高端的问题中显露端倪, 展现优势.

笔者的方法适合于中学生, 就称为"蚊拍打蚊子"的方法吧.

§5. 问题 4

以下推广问题留给感兴趣的读者.

问题 4.

设 $n\in\mathbb{N}^+$, $n\geqslant 4$, 在复数范围内,

$$f\left(x\right)=x^n-3x^3+2x^2+5x-4$$

的 n 个零点依次为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$, 且

$$g\left(x\right)=x^k+x^{k-1}+\cdots+x+1+\frac{1}{x},$$

对 $k=1,2,3,4,6,8,10$, 求值:

$$V_{n,k}=\prod_{i=1}^{n}g\left(x_i\right).$$

参考文献

[1] 程国根. 一道复数求值问题的另解及推广 [J]. “恩次方根”公众号, 2021-07-17.

[2] 叶 军. 叶军数学工作站第 233 期问题 A[J]. “数学爱好者通讯”公众号, 2023-03-28.

(2023-03-29 于广州)