第十一届学而思数学竞赛联考
一试试题

时间：80 分钟

一、填空题 (本大题共 8 小题，每小题 8 分，共 64 分)

1. 方程 $2\log_2(x-2)+\log_2(x+1)=1$ 的所有实数解为 $x=$______________________.

解答 (刘涵祚 陈乐恒 供题) $1+\sqrt{3}$

原方程可以转化为 $(x-2)^2(x+1)=2$，化简得 $(x-1)(x^2-2x-2)=0$，得出 $x=1$ 或 $x=1\pm\sqrt{3}$，又由于 $x\ge 2$，得出原方程的解为 $x=1+\sqrt{3}$.

2. 已知实数 $k\in\mathbb{R}$,平面上的向量 $|\overrightarrow{b}|=1$,若满足 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}$ 的夹角为 $150°$,且 $(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\perp(\overrightarrow{a}+k\overrightarrow{b})$ 的非零向量 $\overrightarrow{a}$ 恰好有两个，则实数 k 的取值范围为______________________.

解答 (刘涵祚 陈乐恒 供题) $(-\infty,0]\bigcup\{\frac{1}{3}\}\bigcup\{3\}$

由于 $(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\perp(\overrightarrow{a}+k\overrightarrow{b})$，则 $(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\cdot(\overrightarrow{a}+k\overrightarrow{b})=0$；即：

$$|\overrightarrow{a}|^2-\frac{\sqrt{3}(k+1)}{2}|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|+k|\overrightarrow{b}|^2=0$$

所以，$|\overrightarrow{a}|^2-\frac{\sqrt{3}(k+1)}{2}|\overrightarrow{a}|+k=0$.

不难发现，上述方程在 $(0,+\infty)$ 上恰好有一个实根.

当 $k\le 0$ 时，显然该方程有一正根和一非正根，满足条件；

当 $k>0$ 时，该方程的判别式 $\Delta=\frac{3}{4}(k+1)^2-4k=0$，化简得：

$$3k^2-10k+3=0$$

解得：$k=3$ 或 $k=\frac{1}{3}$.

综上所述，k 的取值范围是 $(-\infty,0]\bigcup\{\frac{1}{3}\}\bigcup\{3\}$.

3. 已知正实数 a,b,c 依次构成等比数列，并恰好是 $\triangle ABC$ 的三边长，则 $\frac{a+c}{b}$ 的取值范围是______________________.

解答 (李纪琛 供题) $[2,\sqrt{5})$

不妨设 $a=1,b=x,c=x^2(x\ge 1)$，则 c 为该三角形的最长边，于是 $1+x>x^2$，得出：

$$1\le x<\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

而 $\frac{a+c}{b}=\frac{1+x^2}{x}=x+\frac{1}{x}$.

设上述关于 x 的对勾函数为 $f(x)$，则不难发现在 $[1,\frac{1+\sqrt{5}}{2})$ 上，$2\le f(x)<\sqrt{5}$.

4. 已知 F 为椭圆 $C:\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 的右焦点，P 为 C 上一点，$Q(7,8)$，则 $|PF|+|PQ|$ 的取值范围是______________________.

解答 (刘涵祚 陈乐恒 供题) $[4\sqrt{5},10+2\sqrt{41}]$

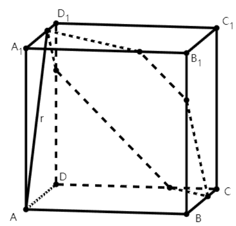
不难发现，$F(3,0)$，一方面，$|PF|+|PQ|\geq|FQ|=4\sqrt{5}$，并且在点 P 位于线段 FQ 与椭圆 C 的交点时，可以取等；

另一方面，考虑左焦点 $E(-3,0)$，则

$$|PF|+|PQ|=|PQ|+10-|PE|\leq 10+|EQ|=10+2\sqrt{41}$$

在点 P 位于 QE 的延长线与椭圆 C 的交点时可以取等；综上即得答案.

5. 如下图，对于正实数 $r(1<r<\sqrt{2})$，以点 A 为球心，半径为 r 的球面与单位立方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱产生 6 个交点，不难发现这六个点在同一个平面上. 则这六个点构成的凸六边形的面积与周长的比值的取值范围是______________________.



解答 (李纪琛 供题) $(\frac{\sqrt{6}}{12},\frac{\sqrt{6}}{8}]$

如左图，不难发现这个六边形对边互相平行，并且每个内角均为 120°，并且其六条边长依次为 $x,\sqrt{2}-x,x,\sqrt{2}-x,x,\sqrt{2}-x$，其中 $x\in\mathbb{R}$ 且 $0<x<\sqrt{2}$.

于是，其周长 $C=3(x+(\sqrt{2}-x))=3\sqrt{2}$.

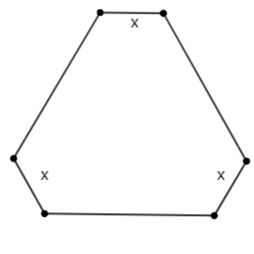
如右图，我们将这个六边形补成一个正三角形，即可得出其面积

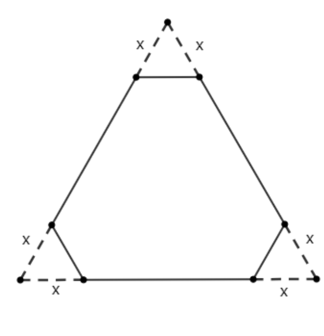
$$S=\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{2}+x)^2-\frac{3\sqrt{3}}{4}x^2=-\frac{\sqrt{3}}{2}(x^2-\sqrt{2}x-1)=-\frac{\sqrt{3}}{2}(x-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

于是我们有 $\frac{\sqrt{3}}{2}<S\leq\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

再结合 $C=3\sqrt{2}$，则

$$\frac{\sqrt{6}}{12}<\frac{S}{C}\leq\frac{\sqrt{6}}{8}$$





6. 设集合 $A=\{x|ax^2+3x-2a=0\}$（其中 a 为实常数）；集合 $B=\{x|2x^2-5x-42\leq 0\}$，如果 $A\cap B=A$，则参数 a 的取值范围是______________________.

解答 (李纪琛 供题) $(-\infty,-\frac{9}{17}]\bigcup\{0\}\bigcup[\frac{42}{41},+\infty)$

不难得出，$B=[-\frac{7}{2},6]$，我们需要 $A\subseteq B$；当 $a=0$ 时，$A=\{0\}$，满足条件；当 $a\neq 0$ 时，此时方程 $ax^2+3x-2a=0$ 为二次方程，其判别式

$$\Delta=9+8a^2>0$$

并且根据韦达定理，其两个根 x_1,x_2 满足：

$$x_1x_2=\frac{-2a}{a}=-2<0$$

则这两根必然是一正一负，再结合 $A\subseteq B$，我们需要满足以下条件即可：

$$f(0)\neq 0;f(0)f(-\frac{7}{2})\leq 0;f(0)f(6)\leq 0$$

解得：$a\leq -\frac{9}{17}$ 或者 $a\geq\frac{42}{41}$

综上所述，参数 a 的取值范围是：$(-\infty,-\frac{9}{17}]\bigcup\{0\}\bigcup[\frac{42}{41},+\infty)$.

7. 多项式 $(1+x+x^2+\cdots+x^{203})^3$ 的展开式在合并同类项以后,x^{300} 这一项的系数为______________________.

解答 (李纪琛 供题) 31192

根据乘法分配律，这个问题等价于求方程 $x+y+z=300$ 满足 $0\leq x,y,z\leq 203$ 的整数解的组数；

首先，该方程的非负整数解的组数为 $\binom{302}{2}=45451$；

下面来考虑该方程有超出 203 的解的组数，不难发现 x,y,z 中恰有一个数超过 203，不妨设为 z，我们设 $w=z-204$，即转化为求方程 $x+y+w=96$ 的非负整数解的组数，为 $\binom{98}{2}$，再结合 $x,y,z,$ 的对称性，则原方程有超出 203 的非负整数解的组数为 $3\binom{98}{2}=14259$；

那么满足条件的解的组数为：$45451-14259=31192$.

8. 从 4×4 的方格表中随机选 5 个不同的方格，则选出的 5 个方格构成连通区域的概率是______________________.

注：连通区域是指，对于区域内部 (不含边界) 任意两点，均存在一条完全落在区域内部 (不含边界) 的折线连接这两个点.

解答 (王正供题) $\frac{61}{1092}$.

我们按照这 5 格的形状来分类计算个数 (旋转后重合也视为不同的形状).

(1) 若包含一个 1×4 矩形，此时 1×4 矩形有横竖两种，剩下的一格有 8 种不同的位置可以选，因此共 16 种形状. 而每种形状在 4×4 方格表中的位置有 3 种，因此共 $16\times 3=48$ 种选法.(下面假设不含 1×4 矩形)

(2) 若包含两个 1×3 矩形，则其必为一横一竖且有一个交点，此时共 9 种形状，每种形状在 4×4 矩形中的位置有 4 种，因此共 $9\times 4=36$ 种选法.

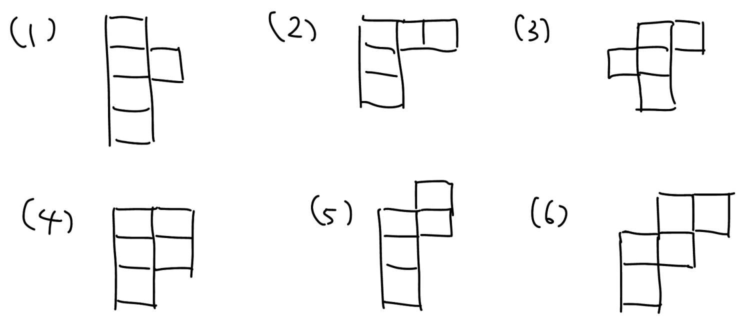
(3) 若只包含一个 1×3 矩形，且剩下两格在该 1×3 矩形的异侧，此时 1×3 矩形有横竖两种，剩下两格有 6 种选法，因此共 12 种形状. 每种形状在 4×4 矩形中的位置有 4 种，因此共 $12\times 4=48$ 种选法.

(4) 若只包含一个 1×3 矩形，且剩下两格在该 1×3 矩形的同侧且均和 1×3 矩形相邻，此时 1×3 矩形有横竖两种，剩下两格有 6 种选法，因此共 12 种形状. 每种形状在 4×4 矩形中的位置有 6 种，因此共 $12\times6=72$ 种选法.

(5) 若只包含一个 1×3 矩形，且剩下两格在该 1×3 矩形的同侧且有一格不和 1×3 矩形相邻，此时 1×3 矩形有横竖两种，剩下两格有 4 种选法，因此共 8 种形状. 每种形状在 4×4 矩形中的位置有 3 种，因此共 $8\times3=24$ 种选法.

(6) 若不含 1×3 矩形，则必为如图所示的形状旋转或对称得到，共 4 种形状. 每种形状在 4×4 矩形中的位置有 4 种，因此共 $4\times4=16$ 种选法.

综上，共 244 种选法构成连通区域，而总的选法有 $\binom{16}{5}$ 种，因此构成连通区域的概率为 $\frac{244}{\binom{16}{5}}=\frac{61}{1092}$.



二、解答题 (本大题共 3 小题, 第 9 题 16 分, 第 10, 11 题各 20 分, 共 56 分)

9. 已知 $x, y \in \mathbb{R}$，且满足 $(4x^3-3x)^2+(4y^3-3y)^2=1$.

求 $x+y$ 的最大值.

解答 ((刘涵祚 陈乐恒 供题)) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

令 $4x^3-3x=\cos 3\theta, 3y-4y^3=\sin 3\theta, \theta \in \mathbb{R}$.

再设 $x=\cos\alpha$，不难发现 $\cos 3\alpha=\cos 3\theta$，类似的，设 $y=\sin\beta$，则 $\sin 3\beta=\sin 3\theta$.

注意到用 $\pi-\beta$ 来代替 β 不会影响 y 的取值，则可以不妨设 $\alpha-\beta=\frac{2t\pi}{3}(t \in \mathbb{Z})$，此时会产生如下三种情况：

情形一：$\alpha=\beta$

此时 $x+y=\sqrt{2}\sin(\alpha+\frac{\pi}{4}) \le \sqrt{2}$.

情形二：$\alpha=\beta-\frac{2\pi}{3}$

此时 $x+y=\sin(\alpha+\frac{2\pi}{3})+\cos\alpha=2\cos\frac{\pi}{12}\cos(\alpha+\frac{\pi}{12}) \le \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.

情形三：$\alpha=\beta-\frac{4\pi}{3}$

此时 $x+y=\cos\alpha+\sin(\alpha+\frac{4\pi}{3})=2\cos(\alpha+\frac{\pi}{12})\cos\frac{5\pi}{12} \le \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.

综上所述，$x+y$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.

10. 设复数 x,y,z 满足：$|x|=|y|=|z|=1$，并且 $\frac{t}{y}=\frac{1}{x}+\frac{1}{z}$，其中 $t\in\mathbb{C}$ 为给定的复数；求 $|\frac{2xy+2yz+3xz}{x+y+z}|$ 的值.（用含 t 的代数式表示）

解答 (刘涵祚 陈乐恒 供题) $|\frac{2t+3}{t+1}|$

先证明一个结论：$|x+y+z|=|xy+yz+xz|$

结合 $|x|=|y|=|z|=1$，我们有，

$$\begin{aligned}|x+y+z|^2&=(x+y+z)(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})\\&=3+\sum_{cyc}x\bar{y}+\sum_{cyc}\bar{x}y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|xy+yz+zx|^2&=(xy+yz+zx)(\bar{x}\bar{y}+\bar{y}\bar{z}+\bar{z}\bar{x})\\&=3+\sum_{cyc}x\bar{y}+\sum_{cyc}\bar{x}y\end{aligned}$$

所以，$|x+y+z|=|xy+yz+xz|$.

回到原题，则有

$$|\frac{2xy+2yz+3xz}{x+y+z}|=|\frac{2xy+2yz+3xz}{xy+yz+zx}|=|2+\frac{zx}{xy+yz+zx}|=|2+\frac{1}{\frac{y}{z}+\frac{y}{x}+1}|$$

又由于 $\frac{y}{z}+\frac{y}{x}=y(\frac{1}{x}+\frac{1}{z})=y\cdot\frac{t}{y}=t$；那么

$$|\frac{2xy+2yz+3xz}{x+y+z}|=|2+\frac{1}{\frac{y}{z}+\frac{y}{x}+1}|=|2+\frac{1}{t+1}|=|\frac{2t+3}{t+1}|.$$

11. 设 p 为给定的正整数，点 F 是抛物线 $\Gamma: y^2=2px$ 的焦点，点 S 在 x 轴上，且满足 $\overrightarrow{OS}=m\overrightarrow{OF}$，其中 m 是给定的正奇数；设经过点 S 且不与坐标轴垂直的动直线 l 与抛物线 Γ 交于 A,B 两点，线段 AB 的中垂线与 AB 以及 x 轴分别交于 M,T 两点，记 N 为线段 MT 的中点，点 N 的轨迹记为 ω.

(1) 确定 ω 的形状以及方程，并证明：在 ω 上存在无穷多个整点（整点就是横纵坐标都是整数的点）.

(2) 如果正整数 p 满足：p 的任意大于 1 的因数都不是完全平方数，求证：ω 上的任意一个整点到原点 O 的距离都不是整数.

解答 （李纪琛 供题）(1) 不难得出 $F(\frac{p}{2},0)$，则 $S(\frac{mp}{2},0)$，我们设直线 l 的方程为：

$$l: x=ky+\frac{mp}{2}(k\neq 0)$$

与抛物线 Γ 联立得：$y^2-2pky-mp^2=0$.

由韦达定理，$y_1+y_2=2pk$，则 $x_1+x_2=k(y_1+y_2)+mp=2pk^2+mp$.

点 M 为线段 AB 的中点，其坐标为 $(pk^2+\frac{mp}{2},pk)$. 再结合 AB 的中垂线与 l 垂直，则中垂线的方程为：

$$y=-kx+pk^3+\frac{(m+2)pk}{2}$$

得出点 $T(pk^2+\frac{(m+2)p}{2},0)$，则 TM 中点 $N(pk^2+\frac{(m+1)p}{2},\frac{pk}{2})$.

不难发现点 N 的轨迹方程为：

$$4y^2=p(x-\frac{(m+1)p}{2})(y\neq 0)$$

其形状为一条去掉顶点的抛物线.

并且由于 m 为正奇数，则 $\frac{m+1}{2}$ 为正整数，记它等于 n，则 ω 的方程可转化为：

$$\omega: 4y^2=p(x-np)$$

对于正整数 t，不难得知，点 $(p(4t^2+n),pt)$ 是 ω 上的整点，显然这样的点有无穷多个.

(2) 由 (1) 中的分析，我们得知 ω 的方程为：$\omega: 4y^2=p(x-np)$.

反证法，若 ω 上存在整点到原点的距离为正整数；

当 $p=1$ 时，必然存在正整数 x,y,a 满足：

$$\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ 4y^2=x-n \end{cases}$$

不难发现 $a\geq x+1$，则

$$x>\frac{x-n}{4}=y^2=a^2-x^2=(a-x)(a+x)\geq a+x>x$$

产生矛盾.

当 p 为大于 1 的奇数时，必然存在正整数 x, y, a 满足：

$$\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ 4y^2=p(x-np) \end{cases}$$

不难发现 $p|y^2$，又由于 p 没有平方因子，则 $p|y$，进而得出 $p|x$，则 $p|a$.

我们记 $x=px_1, y=py_1, a=pa_1$，其中 $x_1, y_1, a_1 \in \mathbb{Z}^+$，那么

$$\begin{cases} x_1^2+y_1^2=a_1^2 \\ 4y_1^2=x_1-n \end{cases}$$

这转化为 $p=1$ 的情况，产生矛盾.

当 p 为偶数时，由于 p 无平方因子，设 $p=2q$，其中 q 为不含平方因子的奇数，此时必然存在正整数 x, y, a 满足：

$$\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ 2y^2=q(x-2nq) \end{cases}$$

容易得出，x 为偶数，记 $x=2x_1$，则

$$\begin{cases} 4x_1^2+y^2=a^2 \\ y^2=q(x_1-nq) \end{cases}$$

易证 $q|y, q|x_1$，则 $q|a$，我们令 $y=qy_2, x_1=qx_2, a=qa_2$，其中 $x_2, y_2, a_2 \in \mathbb{Z}^+$，那么

$$\begin{cases} (2x_2)^2+y_2^2=a_2^2 \\ y_2^2=x_2-n \end{cases}$$

显然 $a_2 \geq 2x_2+1$，则

$$2x_2 > x_2-n = y_2^2 = a_2^2-(2x_2)^2 = (a_2-2x_2)(a_2+2x_2) \geq a+2x_2 > 2x_2$$

产生矛盾.

综上所述，ω 上不存在整点到原点的距离为整数.