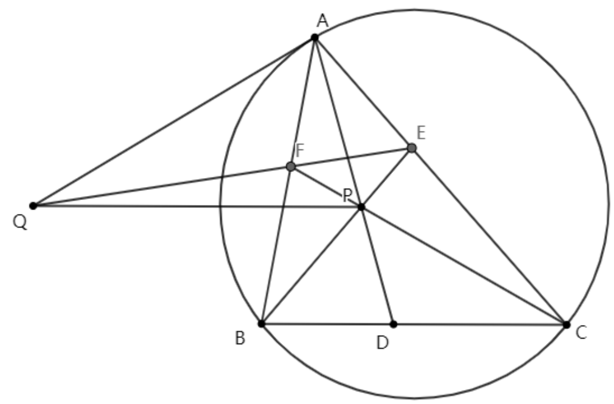
第十一届学而思数学竞赛联考
二试

时间：170 分钟

问题 1. 如图，设 $\triangle ABC$ 内接于圆 Γ，$\angle BAC$ 的角平分线与 BC 交于点 D，P 为线段 AD 上一点，直线 BP 交 AC 于点 E，直线 CP 交 AB 于点 F，设圆 Γ 在点 A 处的切线与直线 EF 交于点 Q；求证：$PQ \parallel BC$.



解答 (刘涵祚 陈乐恒 供题) 利用同一法，设过点 P 且平行于 BC 的直线与 AB、AC、圆 Γ 在点 A 处的切线分别交于点 X、Y、Q'，我们只需证明 Q 与 Q' 相同，即证：E,F,Q' 三点共线；

由 $XY \parallel BC$ 可知 $\triangle AXY$ 与 $\triangle ABC$ 关于点 A 位似，故 AQ' 也与 $\triangle AXY$ 的外接圆相切. 因此有 $\triangle Q'XA \sim \triangle Q'AY$，故

$$\frac{Q'X}{Q'Y} = \frac{Q'X}{Q'A} \cdot \frac{Q'A}{Q'Y} = (\frac{AX}{AY})^2 = (\frac{AB}{AC})^2 = (\frac{BD}{DC})^2. \tag{1}$$

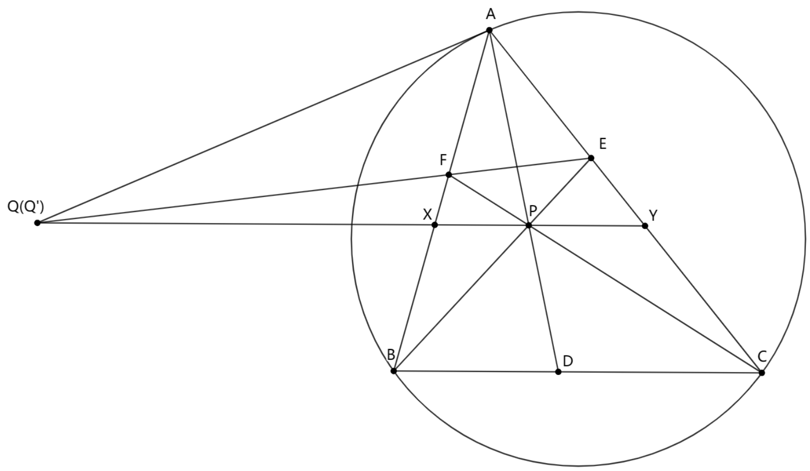
想用梅涅劳斯证明 E,F,Q' 共线，还需计算 $\frac{YE}{EA} \cdot \frac{AF}{FX}$. 用 $FX = FB \cdot \frac{XP}{BC}$，$EY = EC \cdot \frac{YP}{BC}$ 消掉点 X、Y，再结合塞瓦定理 $\frac{AX}{XB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CY}{YA} = 1$，有

$$\frac{YE}{EA} \cdot \frac{AF}{FX} = \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} \cdot \frac{YP}{XB} = \frac{DC}{BD} \cdot \frac{YP}{XB} = (\frac{DC}{BD})^2. \tag{2}$$

将 (1), (2) 两式相乘，得到

$$\frac{Q'X}{Q'Y} \cdot \frac{YE}{EA} \cdot \frac{AF}{FX} = 1,$$

由梅涅劳斯定理逆定理可知 E,F,Q' 共线.



问题 2. 已知 a, b, c 为正实数且满足 $abc = 64$，求证：$\sum_{cyc} \frac{a^2}{\sqrt{a^3+8}\sqrt{b^3+8}} \geq \frac{2}{3}$.

解答 (刘涵祚 陈乐恒 供题) 由均值不等式，$2(a^3+8) = (a^2-2a+4)(2a+4) \leq \left(\frac{a^2+8}{2}\right)^2$，则 $\left(a^2+8\right)^2 \geq 8(a^3+8)$，从而有，

$$\sqrt{a^3+8} \leq \frac{a^2+8}{2\sqrt{2}}$$

于是，

$$\sum_{cyc} \frac{a^2}{\sqrt{a^3+8}\sqrt{b^3+8}} \geq \sum_{cyc} \frac{8a^2}{(a^2+8)(b^2+8)}$$

则我们只需要证明：

$$\sum_{cyc} \frac{8a^2}{(a^2+8)(b^2+8)} \geq \frac{1}{12}.$$

通分后，即证：

$$12 \sum_{cyc} a^2(c^2+8) \prod_{cyc} (a^2+8).$$

即只需要：

$$12 \sum_{cyc} a^2b^2 + 96 \sum_{cyc} a^2 \geq a^2b^2c^2 + 64 \sum_{cyc} a^2 + 8 \sum_{cyc} a^2b^2 + 512.$$

上式等价于

$$\sum_{cyc} a^2b^2 + 8 \sum_{cyc} a^2 \geq 1152.$$

再由均值不等式，

$$\sum_{cyc} a^2b^2 \geq 3\sqrt[3]{a^4b^4c^4} = 768$$

$$8 \sum_{cyc} a^2 \geq 24\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 384$$

两式相加得出结论成立.

问题 3. 已知 p 为质数，且 $p \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3)$. 对于整数 a，若

$$p \mid \prod_{i=1}^{p} (i^3 - ai - 1),$$

则称 a 为咕咕数. 问：$\{1, 2, \dots, p\}$ 中有多少个咕咕数？

解答 (王正 供题)

引理 1. 对于 $1 \le n \le p-2$，$\sum\limits_{i=1}^{p} x^n \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$.

引理 1 的证明. 显然 $n = 1$ 时结论成立. 对 n 归纳，假设 $n = 1, 2, \dots, k-1$ 时结论成立，下面证明 $n = k$ 时结论也成立 ($k \le p-2$).

令

$$f_k(x) = x(x+1)(x+2)\dots(x+k-1),$$

则

$$\sum_{i=1}^{p} f_k(i) = \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{p} \big(f_{k+1}(i) - f_{k+1}(i-1) \big) = \frac{1}{k+1} (f_{k+1}(p) - f_{k+1}(0)) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p),$$

另一方面，有

$$\sum_{i=1}^{p} f_k(i) = \sum_{i=1}^{p} x^k + c_{k-1} \sum_{i=1}^{p} x^{k-1} + \dots + c_1 \sum_{i=1}^{p} x \equiv \sum_{i=1}^{p} x^k (\mathrm{mod}\ p),$$

其中 $c_1, \dots, c_{k-1} \in \mathbb{Z}$ 是 f_k 展开后 $1, \dots, k-1$ 次项的系数，最后的同余号是由归纳假设得到，对比上面两式即可得到

$$\sum_{i=1}^{p} x^k \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p),$$

故引理成立.

注：该引理也可以用原根证明.

回到原题，易知题目可以转化为：由多少个 a，使得同余方程

$$x^2 - \frac{1}{x} \equiv a (\mathrm{mod}\ p)$$

有解.

引理 2. 满足 $x^2 - \frac{1}{x} \equiv y^2 - \frac{1}{y} \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$ 且 $1 \le x, y \le p-1$ 且 $x \ne y$ 的 (x, y) 共有 $p-3$ 组.

引理 2 的证明. 对于 $1 \le x, y \le p-1$，

$$\begin{aligned} & x^2-\frac{1}{x}\equiv y^2-\frac{1}{y}(\text{mod } p) \\ \Leftrightarrow\ & (x-y)(x+y+\frac{1}{xy})\equiv 0(\text{mod } p) \\ \Leftrightarrow\ & x+y+\frac{1}{xy}\equiv 0(\text{mod } p) \\ \Leftrightarrow\ & xy(x+y)\equiv -1(\text{mod } p) \\ \Leftrightarrow\ & (x+\frac{y}{2})^2\equiv \frac{y^2}{4}-\frac{1}{y}(\text{mod } p) \end{aligned}$$

注意到，如果不要求 $x\neq y$，当 $\frac{y^2}{4}-\frac{1}{y}\equiv 0(\text{mod } p)$ 时，恰有一个 x 使得上式成立；当 $\frac{y^2}{4}-\frac{1}{y}$ 是 p 的二次剩余时，恰有两个 x 使得上式成立；当 $\frac{y^2}{4}-\frac{1}{y}$ 是 p 的二次非剩余时，恰有 0 个 x 使得上式成立.

我们把其重新叙述为: 对于固定的 y，恰有 $\left(\frac{\frac{y^2}{4}-\frac{1}{y}}{p}\right)+1$ 个 x 使得上式成立. (其中 $\left(\frac{\frac{y^2}{4}-\frac{1}{y}}{p}\right)$ 为勒让德符号)

结合引理 1 进行计算可知，使得等式成立的 (x,y) 的组数模 p 的余数为

$$\begin{aligned} \sum_{y=1}^{p-1}\left((\frac{y^2}{4}-\frac{1}{y})^{\frac{p-1}{2}}-1\right) &\equiv -1+\sum_{y=1}^{p-1}(\frac{y^2}{4}-\frac{1}{y})^{\frac{p-1}{2}} \\ &\equiv -1+\sum_{y=1}^{p-1}\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}}\binom{\frac{p-1}{2}}{k}(\frac{1}{4})^k(-1)^{\frac{p-1}{2}-k}y^{3k-\frac{p-1}{2}} \\ &\equiv -1+\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}}\left(\binom{\frac{p-1}{2}}{k}(\frac{1}{4})^k(-1)^{\frac{p-1}{2}-k}\sum_{y=1}^{p-1}y^{3k-\frac{p-1}{2}}\right) \\ &\equiv -1+(\frac{1}{4})^{\frac{p-1}{2}}\sum_{y=1}^{p-1}y^{p-1} \\ &\equiv -1+(\frac{1}{2})^{p-1}\sum_{y=1}^{p-1}y^{p-1} \\ &\equiv -2(\text{mod } p) \end{aligned}$$

由于对每个 y 至多有两个满足条件的 x，且 $y^3\equiv 4(\text{mod } p)$ 时只有一个满足条件的 x，因此总解数至多 $2(p-1)-1=2p-3$ 组，结合解数需要模 p 余-2，所以恰 $p-2$ 组解.

当 $x=y$ 时，需要满足 $x^3\equiv -\frac{1}{2}(\text{mod } p)$，显然这样的 x 只有一个. 因此我们需要去掉一个 $x=y$ 的解，得到 $x\neq y$ 的总解数为 $p-3$. 故引理 2 成立.

回到原题，对于固定的 a，显然 $x^2-\frac{1}{x}\equiv a(\text{mod } p)(1\le x\le p-1)$ 至多 3 个解. 我们设有 r_i 个 a，使得 $x^2-\frac{1}{x}\equiv a(\text{mod } p)$ 有 i 组解 $(i=0,1,2,3)$. 反过来看，除了 0 外的每个 x 都是某个 $x^2-\frac{1}{x}\equiv a(\text{mod } p)$ 的解，我们有 $r_1+2r_2+3r_3=p-1$.

注意到，若 x 和 y 是两个不同的解，则与前面同理得到 $xy(x+y)=-1$，令 $z=-(x+y)$，则 $xz(x+z)=-1$，故 $z\neq 0$，可得到 $z^2-\frac{1}{z}\equiv x^2-\frac{1}{x}\equiv a(\text{mod } p)$，即 z 也是解. 因此只有当 $x=-2z$ 或 $z=-2x$ 时才可能恰有两个解 (不妨 $z=-2x$)，此时需满足 $4x^2+\frac{1}{2x}\equiv x^2-\frac{1}{x}(\text{mod } p)$，

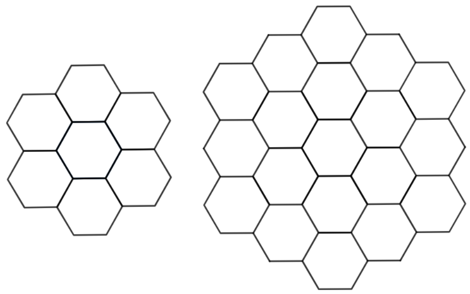
即 $x^3 \equiv -\frac{1}{2} (\bmod\ p)$，这样的 x 只有一个，因此恰有两个解的 a 只有一个，即 $r_2 = 1$. 因此有 $r_1 + r_3 = p - 3$

再结合引理 2，每个有 3 个解的 a 会提供 6 个引理 2 中的解 (x, y)，每个有 2 个解的 a 会提供 2 个引理 2 中的解 (x, y)，可得 $6r_3 + 2r_2 = p - 3$. 结合刚才得到的式子，解得 $r_3 = \frac{p-5}{6}, r_1 = \frac{p-1}{2}$，因此满足条件的 a 共有

$$r_1 + r_2 + r_3 = \frac{2p-1}{3}$$

个. 故共有 $\frac{2p-1}{3}$ 个咕咕数.

问题 4. 对于一个边长为 n 的蜂巢（其中蜂巢是由若干个小的正六边形区域构成的大正六边形，每个正六边形区域内各有一只蜜蜂；蜂巢的边长为正六边形区域的圈数），下面为 $n=2,3$ 时的情况示例.



初始时刻有若干个正六边形区域内的蜜蜂感染病毒，所有蜜蜂一旦感染就一直处于感染状态. 由于防疫措施非常到位，某个未被感染的正六边形区域内的蜜蜂被感染，当且仅当与它相邻的所有区域中至少有 5 只蜜蜂已经被感染.

已知最终所有的蜜蜂全部感染了病毒，求初始时感染病毒的蜜蜂数目的最小可能值 $f(n)$.

解答 (刘涵祚 陈乐恒 供题)

$$f(n)=\begin{cases}1, & n=1\\ 6, & n=2\\ \lceil\frac{6n^2+1}{4}\rceil & n\geq 3\end{cases}$$

当 $n=1,2$ 时，结论显然.

当 $n\geq 3$ 时，考虑所有未被感染的区域的集合 T，设 $|T|=t$.

我们知道边长为 n 的蜂巢共有 $3n^2-3n+1$ 个区域，要证明：$f(n)\geq\lceil\frac{6n^2+1}{4}\rceil$，我们只需要说明：

$$t\leq\frac{6n^2-12n+3}{4}$$

不难发现，T 中的区域一定不在最外圈，并且这些区域无法连成圈.

由上述条件，我们在考虑 T 的时候不用考虑最外圈，并且根据它们无法成圈，则初始时刻已经被感染的区域必然连通.

我们考虑除了最外圈其他内圈的总周长：

$$C=6\sum_{i=0}^{n-2}(3i+1)=9n^2-21n+12$$

这其中初始时刻未被感染的区域对周长的总贡献不小于 $5t+1$；

并且由于初始感染的区域连通，且 T 中无圈，则除了最外圈以外，初始时刻被感染的区域对周长的总贡献不小于 $(3n^2-9n+7-t)+1$.（这是由于这些区域至少有一个与最外圈相邻，它对于周长的贡献不小于 2，其余的区域周围不全被感染，这些区域对于周长的贡献不小于 1）

于是，$(5t+1)+(3n^2-9n+7-t)+1\leq 9n^2-21n+12$，得出：

$$t\leq\frac{6n^2-12n+3}{4}$$

即 $f(n)\ge\lceil\frac{6n^2+1}{4}\rceil$ 结论成立.

下面对于 $f(n)$ 的最值情况给出构造：

$n=1$ 时，只有一个区域，它被感染；

$n=2$ 时，感染最外圈的 6 个区域即可；

$n\ge3$ 时，我们先按照由外到内的顺序将所有的奇数圈染成黑色，然后找一条长度为 $2n-2$ 的列，按照从上到下的顺序，分别将第 $2,3$ 格，第 $4,5$ 格，$\ldots$，第 $2m,2m+1$ 格的颜色进行黑白互换，其中正整数 m 满足 $2m+1\le n<2m+3$.

然后，根据 n 的奇偶性进行如下操作：

1) 当 n 为奇数时，再将刚才那一列中的第 $n-1$ 格染黑，此时共得到 $\frac{3n^2+1}{2}$ 个黑格，我们让这些黑格所对应的区域被感染即可；

2) 当 n 为偶数时，再将刚才那一列中的第 $n-1$ 格由黑变白即可得到 $\frac{3n^2}{2}+1$ 个黑格，我们让这些黑格所对应的区域被感染即可.

综上所述，我们有

$$f(n)=\begin{cases}1, & n=1\\ 6, & n=2\\ \lceil\frac{6n^2+1}{4}\rceil & n\ge3\end{cases}$$