第十二届学而思数学竞赛联考
一试试题

时间：80 分钟

一、填空题 (本大题共 8 小题，每小题 8 分，共 64 分)

1. 设实数 a, b, c 满足 $1 \le a < b < c$，且它们构成等差数列，如果 $a+b+c = abc$，则 $\ln(2b^2-3)$ 的取值范围是____________________.

解答 （李纪琛供题）$(\ln 3, \ln 5]$

不难得出 $abc = a+b+c = 3b$，则 $ac = 3$，于是 $2b^2 - 3 = \frac{(a+c)^2}{2} - ac = \frac{a^2+c^2}{2} = \frac{(c-a)^2}{2} + 3$；则 $c-a$ 越小，$2b^2-3$ 就越小；结合 $1 \le a < c$ 以及 $ac = 3$，则 $0 < c-a \le 2$；那么 $3 < 2b^2-3 \le 5$. 则 $\ln 3 < \ln(2b^2-3) \le \ln 5$.

2. 定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 同时是以 2 为周期的周期函数，并且在 $x \in (0,1)$ 时，$f(x) = \ln(x^2 - 2x + \frac{3}{2})$，则函数 $f(x)$ 在 $[0, 10]$ 上的零点个数为____________________.

解答 （李纪琛供题）21

不难发现 $f(0) = f(1) = 0$，则所有整数 n 均为函数 $f(x)$ 的零点；

对于 $x \in (0,1)$ 时，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，则此时 $-\ln 2 < f(x) < \ln 3 - \ln 2$，则函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上恰好有一个零点，则 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上恰好有一个零点，则 $f(x)$ 在 $(1,2)$ 上恰好有一个零点；那么函数 $f(x)$ 在 $[0,2)$ 恰好有四个零点，而这恰好是 $f(x)$ 的一个“循环节”；那么函数 $f(x)$ 在 $[0,10]$ 上有 21 个零点.

3. 设点 P 是曲线 $\Gamma: y^2 - x^2 = 4(y > 0)$ 上的一个动点，过点 P 分别向直线 $y = x, y = -x$ 引垂线，垂足分别为 A, B，再分别过点 A, B 向 x 轴引垂线，垂足分别为 C, D，那么 P, A, B, C, D 这五个点构成的凸五边形的面积的最小值是____________________.

解答 （李纪琛供题）3

不难发现曲线 Γ 是双曲线的上半支，而直线 $y = x, y = -x$ 恰好是它的两条渐近线，设点 $P(x_0, y_0)$，则 $y_{)}^2 - x_0^2 = 4$，如下图，我们记 $PA = a, PB = b$.

不难发现，$a = \frac{|x_0 - y_0|}{\sqrt{2}}, b = \frac{|x_0 + y_0|}{\sqrt{2}}$；则，

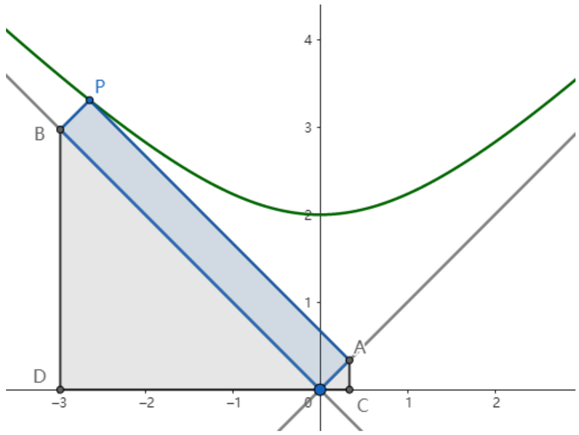
$$ab = |\frac{(x_0 - y_0)(x_0 + y_0)}{2}| = \frac{|y_0^2 - x_0^2|}{2} = 2$$

于是该凸五边形的面积

$$S = ab + \frac{a^2 + b^2}{4} \ge \frac{3ab}{2} = 3$$

当且仅当 P 位于实轴的顶点时取到.

4. 设 z 为复数，若 $\frac{iz^2}{i-z}$ 为实数（i 为虚数单位），则 $|z-1|$ 的最小值为____________________.



解答 （王正供题）$\sqrt{2}-1$

由于 $-\frac{iz^2}{i-z}=iz-1+\frac{1}{iz+1}$，则根据题意，$iz+1+\frac{1}{iz+1}$ 是实数，即 $|iz+1|=1$ 或者 $iz+1$ 为实数.

若 $|iz+1|=1$ 则 $|z-i|=1$，从几何角度来看，z 在复平面上的轨迹就是以 i 为圆心半径为 1 的圆，故 $|z-1|\geq|1-i|-|i-z|=\sqrt{2}-1$，当 $z=\frac{\sqrt{2}}{2}+(1-\frac{\sqrt{2}}{2})i$ 时取等.

若 $iz+1$ 为实数，则 iz 为实数，则 $\mathrm{Re(z)}=0$，于是 $|z-1|\geq\mathrm{Re(z-1)}\geq 1>\sqrt{2}-1$.

综上，最小值为 $\sqrt{2}-1$.

5. 我们将 8 个半径相等的小球放入一个棱长为 2 的正方体内的 8 个角处，且它们均与该正方体的 3 个面相切，小球 Γ 和这 8 个小球都相切 (外切)，则当那 8 个小球的半径发生变化时，这 9 个球的表面积之和的最小值是____________________.

解答 （李纪琛供题）$\frac{(96-16\sqrt{3})\pi}{11}$

设球 Γ 的半径为 R，8 个小球的半径为 r，则 $R+r+\sqrt{3}r=\sqrt{3}$.

于是，其表面积之和为 $S=4\pi(R^2+8r^2)$.

而 $(R^2+8r^2)[1+(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4})^2]\geq[R+(1+\sqrt{3})r]^2=3$.

则 $R^2+8r^2\geq\frac{24-4\sqrt{3}}{11}$.

即 $S\geq\frac{(96-16\sqrt{3})\pi}{11}$.

注. 由于此题在最初的试卷中叙述有问题，因此填 4π 的同学也给分. 原本的叙述“Γ 是在放入这 8 个小球之后能够放入正方体的最大的球”改为“Γ 和这 8 个小球都相切 (外切)”，如果按照原来的叙述，当八个球半径很小时小球可以不相切，此时表面积之和可以无限接近 4π 但取不到.

6. 设凸四边形 $ABCD$ 满足 $AC=2$，并且其对角线 AC,BD 的夹角为 60°，如果 $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})$ 与 $(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$ 垂直，则该四边形的面积是____________________.

解答 （李纪琛供题）$\sqrt{3}$

设边 AB,BC,CD,DA 的中点分别为 E,F,G,H，则不难得出四边形 $EFGH$ 是平行四边形，且它的面积是四边形 $ABCD$ 的一半.

由于 $\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DG}$，则

$$2\overrightarrow{EG}=(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EA})+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD})+(\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{DG})=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$$

所以 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{HF}$，根据题意，$EG\perp HF$，即四边形 $EFGH$ 是菱形，根据题意，它有一个内角为 60°，且 $EF=FG=GH=HE=\frac{AC}{2}=1$；则

$$S_{EFGH}=1^2\cdot\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

所以 $S_{ABCD}=2S_{EFGH}=\sqrt{3}$.

7. 设实数 $a,b,c\in(-1,1)$，且满足：

$$\sqrt{(1+a)(1+b)(1+c)}=\sqrt{(ab-a-b+1)(1+c)}+\sqrt{(bc-b-c+1)(1+a)}+\sqrt{(ca-c-a+1)(1+b)}$$

则 $a+b+c$ 的取值范围是____________________.

解答 （李纪琛供题）$(1,\frac{3}{2}]$

设 $a=\cos A,b=\cos B,c=\cos C(A,B,C\in(0,\pi))$，则,

$$\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}=\sqrt{\frac{2\sin^2\frac{A}{2}}{2\cos^2\frac{A}{2}}}=\tan\frac{A}{2}$$

于是根据题意，

$$\begin{aligned}1&=\frac{\sqrt{(ab-a-b+1)(1+c)}+\sqrt{(bc-b-c+1)(1+a)}+\sqrt{(ca-c-a+1)(1+b)}}{\sqrt{(1+a)(1+b)(1+c)}}\\&=\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\cdot\sqrt{\frac{1-b}{1+b}}+\sqrt{\frac{1-b}{1+b}}\cdot\sqrt{\frac{1-c}{1+c}}+\sqrt{\frac{1-c}{1+c}}\cdot\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\\&=\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}\end{aligned}$$

再结合 $A,B,C\in(0,\pi)$，不难得出 $A+B+C=\pi$

于是 $a+b+c=\cos A+\cos B+\cos C=\cos A+2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}=1-2\sin^2\frac{A}{2}+2\cos\frac{B-C}{2}\sin\frac{A}{2}$.

我们固定 A，则显然 $|B-C|$ 越大，$a+b+c$ 的值越小，于是

$$1-2\sin^2\frac{A}{2}+2\cos\frac{\pi-A}{2}\sin\frac{A}{2}<a+b+c\le 1-2\sin^2\frac{A}{2}+2\sin\frac{A}{2}$$

则

$$(a+b+c)>1-2\sin^2\frac{A}{2}+2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2}=1$$

$$(a+b+c)_{max}=(1-2\sin^2\frac{A}{2}+2\sin\frac{A}{2})_{max}=\frac{3}{2}$$

于是，$a+b+c$ 的取值范围是 $(1,\frac{3}{2}]$.

8. 一个平台的俯视图为一个 3×3 的方格表，初始时在中心的方格 O 处有一只电子瓢虫，每过一秒钟，该瓢虫都会随机选择平行于平台边界的四个方向之一移动一个单位，如果瓢虫跌落平台就会‘死亡’，那么在 2023 秒后，该瓢虫仍然‘存活’的概率是____________________.

解答 （李纪琛供题）$\frac{1}{2^{1011}}$

我们分别用 $a_n, b_n, c_n, d_n (n \geq 0)$ 来表示 n 秒以后该瓢虫‘死亡’、位于平台的四个角、位于平台四条边界的中心方格以及位于方格 O 的概率，则 $a_0 = b_0 = c_0 = 0, d_0 = 1$，并且我们可以得到如下递推关系：

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2} b_n + \frac{1}{4} c_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{2} c_n \\ c_{n+1} = \frac{1}{2} b_n + d_n \\ d_{n+1} = \frac{1}{4} c_n \end{cases}$$

于是 $b_{n+1} = 2d_{n+1}$，则 $c_{n+2} = \frac{1}{2} b_{n+1} + d_{n+1} = b_{n+1} = \frac{1}{2} c_n$.

从而可以得出：$c_{2n} = 0, c_{2n+1} = \frac{1}{2^n}$，则 $b_{2n+1} = 0, b_{2n+2} = \frac{1}{2^{n+1}}$.

于是 $a_{2n+3} - a_{2n+1} = \frac{1}{2}(b_{2n+2} + b_{2n+1}) + \frac{1}{4}(c_{2n+2} + c_{2n+1}) = \frac{1}{2^{n+1}}$，再结合 $a_1 = a_0 = 0$，则

$$a_{2023} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{1011}} = 1 - \frac{1}{2^{1011}}$$

于是第 2023 秒后，瓢虫存活的概率为：$p = 1 - a_{2023} = \frac{1}{2^{1011}}$.

二、解答题 (本大题共 3 小题, 第 9 题 16 分, 第 10, 11 题各 20 分, 共 56 分)

9. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，并且对于任意 $n\in\mathbb{Z}_+$，都有 $S_n+a_n=2$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 定义数列 $\{b_n\}$ 如下：$b_n=na_n+\frac{1}{a_n}$，再设数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，求 $[T_{2023}]$.（其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数）

解答 （李纪琛供题）(1)$a_n=\frac{1}{2^{n-1}}$, (2)$[T_{2023}]=2^{2023}+2$.

(1) 令 $n=1$，由于 $S_1=a_1$，则 $a_1=1$；结合 $S_{n+1}+a_{n+1}=2=S_n+a_n$，则不难得出 $a_{n+1}=\frac{a_n}{2}$，即数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1，公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列，于是 $a_n=\frac{1}{2^{n-1}}$.

(2) 根据上述结论，不难得出，$b_n=na_n+\frac{1}{a_n}=\frac{n}{2^{n-1}}+2^{n-1}$. 那么，

$$
\begin{aligned}
T_n &= \sum_{i=1}^{n} b_i \\
&= \sum_{i=1}^{n}(\frac{n}{2^{n-1}}+2^{n-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{n}{2^{n-1}}+\sum_{i=1}^{n}2^{n-1} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=i}^{n-1}\frac{1}{2^j}+(2^n-1) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}(\frac{1}{2^{i-1}}-\frac{1}{2^{n-1}})+(2^n-1) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{2^{i-1}}-\frac{n}{2^{n-1}}+2^n-1 \\
&= 2^n+3-\frac{n+2}{2^{n-1}}
\end{aligned}
$$

显然，在 $n\geq 4$ 时，$n+2<2^{n-1}$，则 $2^n+2<T_n<2^n+3$.

于是 $[T_{2023}]=2^{2023}+2$.

10. 在平面直角坐标系 xOy 中，圆 Γ 的圆心 P 在 y 轴上 $(P\neq O)$，且与双曲线 $\Omega:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的右半支交于两个不同的点 A,B. 已知 $PA^2+PB^2=OA^2+OB^2$.

(1) 求双曲线 Ω 的离心率.

(2) 若双曲线 Ω 的右焦点为 $F(2,0)$，且圆 Γ 过点 F，求 $|FA|+|FB|$ 的取值范围.

解答 （王正供题）$(1)\sqrt{2},(2)(2\sqrt{6}-2\sqrt{2},+\infty)$.

第一问：设 $P(0,t)$，AB 中点为 M，由中线长公式，有 $OA^2+OB^2=2OM^2+2MA^2,PA^2+PB^2=2PM^2+2MA^2$. 故题目条件

$$PA^2+PB^2=OA^2+OB^2\Leftrightarrow OM=PM\Leftrightarrow y_M=\frac{t}{2}$$

设 $\Gamma:x^2+(y-t)^2=r^2$，与双曲线方程联立后，消掉 x 可以得到

$$(\frac{a^2}{b^2}+1)y^2-2ty+t^2+a^2-r^2=0 \tag{1}$$

由韦达定理可知，$y_A+y_B=\frac{2t}{\frac{a^2}{b^2}+1}$，故 $y_M=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{t}{\frac{a^2}{b^2}+1}=\frac{t}{2}$，可以得出 $a=b$，故双曲线的离心率为

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\sqrt{2}.$$

第二问：由条件 $c=2\Rightarrow a=b=\sqrt{2}\Rightarrow\Omega:x^2-y^2=2$. 又圆 Γ 过点 F，所以 $r^2=t^2+4$，故 (1) 式变为：

$$y^2-ty-1=0$$

由韦达定理 $y_A+y_B=t,y_Ay_B=-1$，因此，$y_A^2+y_B^2=t^2+2$. 我们有

$$(x_A+x_B)^2=4+y_A^2+y_B^2+2\sqrt{(y_A^2+2)(y_B^2+2)}=t^2+6+2\sqrt{2t^2+9}\in(12,+\infty).$$

所以 $x_A+x_B\in(2\sqrt{3},+\infty)$.

再由双曲线的第二定义有，$|FA|+|FB|=\sqrt{2}(x_A-1+x_B-1)\in(2\sqrt{6}-2\sqrt{2},+\infty)$.

11. 设 $2 \le n \le 2023$ 是一个给定的正整数，甲来玩一个游戏：他选择 n 个和为 2023 的正整数 $m_1, m_2, \ldots, m_n$ 以及 n 个模长为 1 的复数 $z_1, z_2, \ldots, z_n$（可以相同）. 对于任意的 $1 \le i < j \le n$，我们定义：$D_{ij} = m_i m_j |z_i - z_j|^2$；如果我们把 $D = \sum_{1 \le i < j \le n} D_{ij}$ 作为甲获得的总积分，那么甲最多能够获得多少分？

解答 （李纪琛供题）$D_{max} \begin{cases} 4092528 & n = 2 \\ 4092529 & n \ge 3 \end{cases}$

首先，在 $n = 2$ 时，$D = D_{12} = m_1 m_2 |z_1 - z_2|^2 \le 4 m_1 m_2 \le 4 \times 1011 \times 1012 = 4092528$，甲让 $m_1 = 1011, m_2 = 1012, z_1 = -1, z_2 = 1$ 即可.

当 $n \ge 3$ 时，

$$\begin{aligned}
D &= \sum_{1 \le i < j \le n} D_{ij} \\
&= \sum_{1 \le i < j \le n} m_i m_j (z_i - z_j)(\bar{z_i} - \bar{z_j}) \\
&= \sum_{1 \le i < j \le n} 2 m_i m_j - \sum_{1 \le i < j \le n} m_i m_j (z_i \bar{z_j} + \bar{z_i} z_j) \\
&= 2 \sum_{1 \le i < j \le n} m_i m_j + \sum_{i=1}^{n} m_i^2 z_i \bar{z_i} - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_i m_j z_i \bar{z_j} \\
&= \sum_{i=1}^{n} m_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} m_i m_j - \sum_{i=1}^{n} m_i z_i \cdot \sum_{j=1}^{n} m_j \bar{z_j} \\
&= (\sum_{i=1}^{n} m_i)^2 - \sum_{i=1}^{n} m_i z_i \cdot \sum_{i=1}^{n} \bar{m_i} \bar{z_i} \\
&= 2023^2 - |\sum_{i=1}^{n} m_i z_i|^2 \\
&\le 4092529
\end{aligned}$$

甲令 $m_1 = 1, m_2 = 1011$，此时 $\sum_{i=3}^{n} m_i = 1011$，甲再让 $z_1 = -1, z_2 = e^{i\theta}, z_3 = \cdots = z_n = e^{-i\theta}$，其中 $\theta = \arccos \frac{1}{2022}$.

此时，$\sum_{i=1}^{n} m_i z_1 = -1 + 1011(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = -1 + 2022 \cos\theta = 0$，那么此时

$$D = 2023^2 - |\sum_{i=1}^{n} m_i z_i|^2 = 4092529.$$

综上所述，在 $n = 2$ 时，$D_{max} = 4092528$，在 $3 \le n \le 2023$ 时，$D_{max} = 4092529$.