第十二届学而思数学竞赛联考
一试试题

时间：80 分钟

一、填空题 (本大题共 8 小题，每小题 8 分，共 64 分)

1. 设实数 a,b,c 满足 $1 \le a < b < c$，且它们构成等差数列，如果 $a+b+c=abc$，则 $\ln(2b^2-3)$ 的取值范围是____________________.

2. 定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 同时是以 2 为周期的周期函数，并且在 $x \in (0,1)$ 时，$f(x) = \ln(x^2-2x+\frac{3}{2})$，则函数 $f(x)$ 在 $[0,10]$ 上的零点个数为____________________.

3. 设点 P 是曲线 $\Gamma: y^2-x^2=4(y>0)$ 上的一个动点，过点 P 分别向直线 $y=x, y=-x$ 引垂线，垂足分别为 A,B，再分别过点 A,B 向 x 轴引垂线，垂足分别为 C,D，那么 P,A,B,C,D 这五个点构成的凸五边形的面积的最小值是____________________.

4. 设 z 为复数，若 $\frac{iz^2}{i-z}$ 为实数 (i 为虚数单位)，则 $|z-1|$ 的最小值为____________________.

5. 我们将 8 个半径相等的小球放入一个棱长为 2 的正方体内的 8 个角处，且它们均与该正方体的 3 个面相切，小球 Γ 是在放入这 8 个小球之后能够放入正方体的最大的球，则当那 8 个小球的半径发生变化时，这 9 个球的表面积之和的最小值是____________________.

6. 设凸四边形 $ABCD$ 满足 $AC=2$，并且其对角线 AC,BD 的夹角为 60°，如果 $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})$ 与 $(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$ 垂直，则该四边形的面积是____________________.

7. 设实数 $a,b,c \in (-1,1)$，且满足：

$$\sqrt{(1+a)(1+b)(1+c)} = \sqrt{(ab-a-b+1)(1+c)}+\sqrt{(bc-b-c+1)(1+a)}+\sqrt{(ca-c-a+1)(1+b)}$$

则 $a+b+c$ 的取值范围是____________________.

8. 一个平台的俯视图为一个 3×3 的方格表，初始时在中心的方格 O 处有一只电子瓢虫，每过一秒钟，该瓢虫都会随机选择平行于平台边界的四个方向之一移动一个单位，如果瓢虫跌落平台就会‘死亡’，那么在 2023 秒后，该瓢虫仍然‘存活’的概率是____________________.

二、解答题 (本大题共 3 小题, 第 9 题 16 分, 第 10, 11 题各 20 分, 共 56 分)

9. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，并且对于任意 $n \in \mathbb{Z}_+$，都有 $S_n + a_n = 2$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 定义数列 $\{b_n\}$ 如下：$b_n = na_n + \frac{1}{a_n}$，再设数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，求 $[T_{2023}]$.（其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数）

10. 在平面直角坐标系 xOy 中，圆 Γ 的圆心 P 在 y 轴上 $(P \neq O)$，且与双曲线 $\Omega : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的右半支交于两个不同的点 A, B. 已知 $PA^2 + PB^2 = OA^2 + OB^2$.

(1) 求双曲线 Ω 的离心率.

(2) 若双曲线 Ω 的右焦点为 $F(2, 0)$，且圆 Γ 过点 F，求 $|FA| + |FB|$ 的取值范围.

11. 设 $2 \le n \le 2023$ 是一个给定的正整数，甲来玩一个游戏：他选择 n 个和为 2023 的正整数 $m_1, m_2, \ldots, m_n$ 以及 n 个模长为 1 的复数 $z_1, z_2, \ldots, z_n$（可以相同）. 对于任意的 $1 \le i < j \le n$，我们定义：$D_{ij} = m_i m_j |z_i - z_j|^2$；如果我们把 $D = \sum_{1 \le i < j \le n} D_{ij}$ 作为甲获得的总积分，那么甲最多能够获得多少分？