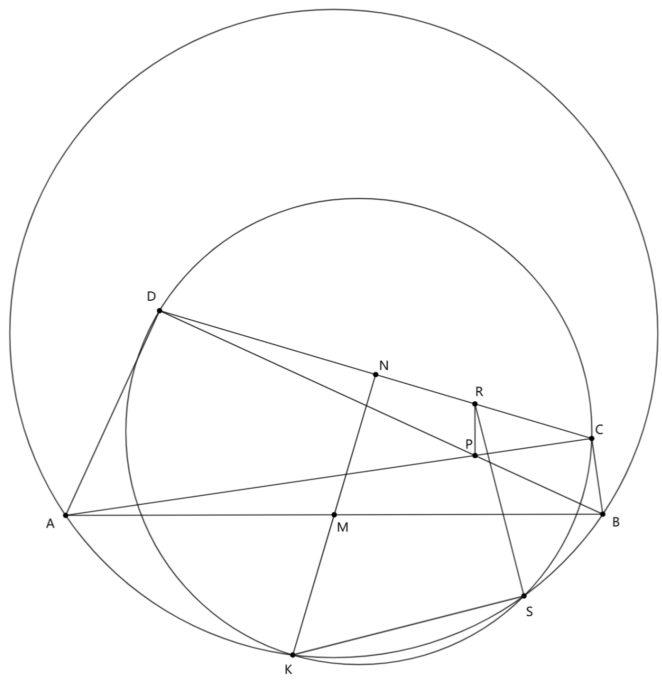
第十二届学而思数学竞赛联考
二试

时间：170 分钟

问题 1. 如图，已知四边形 ABCD 满足 $\angle ADB = \angle ACB = 90°$，设 AC 和 BD 的交于点 P，点 R 在 CD 上且 $RP \perp AB$. M、N 分别为 AB、CD 的中点，K 为 NM 延长线上一点，$\triangle DKC$ 外接圆与 $\triangle AKB$ 外接圆交于点 S. 求证：$KS \perp SR$.



解答 (王正供题) 由 A、B、C、D 共圆及蒙日定理可知直线 CD、AB、KS 共点 (设该点为 T). 过点 P 做 AB 的垂线，设垂足为 H.

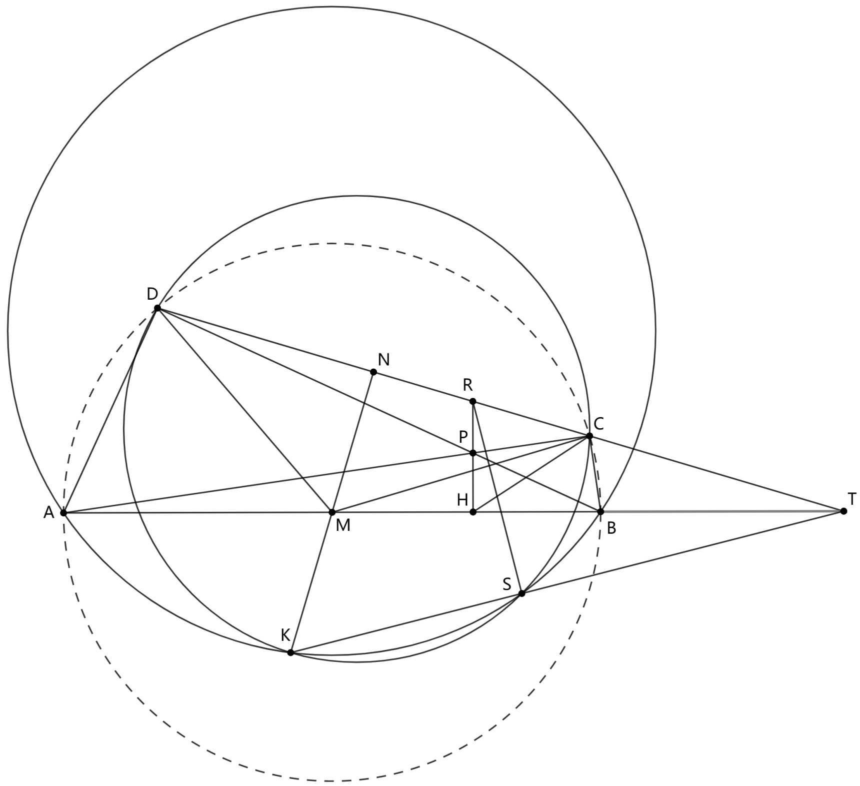
注意到 $\triangle DMC$ 中，$MD = \frac{AB}{2} = MC$，由等腰三角形三线合一可知 $MN \perp DC$. 又因为 $RH \perp AB$，所以 M、N、R、H 四点共圆.

又因为 $\angle HCD = \angle HCA + \angle ACD = \angle HBP + \angle ABD = 2\angle ABD = \angle DMA$，所以 C、D、M、H 四点共圆.

由上面得到的共圆及圆幂定理可知

$$TN \cdot TR = TM \cdot TH = TD \cdot TC = TK \cdot TS,$$

故 K、S、R、N 四点共圆，又由 $KN \perp NR$，所以 $KS \perp SR$.


D
N
R
C
P
A
M
H
B
T
S
K

问题 2. 已知 $a_1, a_2, \ldots, a_{22} \in [1,2]$，求

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{22} a_i a_{i+1}}{(\sum\limits_{i=1}^{22} a_i)^2}$$

的最大值. (其中 $a_{23} = a_1$)

解答 (王正供题) 答案是 $\frac{1}{20}$.

设 $a_1, \ldots, a_{22}$ 中的最大值为 $a_j = M$，最小值为 $a_k = m$. 不妨 $j > k$.

我们首先来估计 $\sum\limits_{i=1}^{22}(a_i - M)(a_{i+1} - m)$ 的值. 显然有 $(a_i - m)(a_{i+1} - M) \le 0$. 进一步，注意到

$$(a_i - M)(a_{i+1} - m) = (a_i - m)(a_{i+1} - M) + (M - m)(a_i - a_{i+1}) \le (M - m)(a_i - a_{i+1}),$$

因此有

$$\sum_{i=1}^{22}(a_i - M)(a_{i+1} - m) \le \sum_{i=k}^{j-1}(a_i - M)(a_{i+1} - m) \le (M - m)\sum_{i=k}^{j-1}(a_i - a_{i+1}) = -(M - m)^2. \quad (1)$$

又由 $m \le M \le 2m$ 易知

$$mM \ge \frac{2}{5}(m^2 + M^2). \quad (2)$$

结合 (1), (2) 两式可知

$$\begin{aligned}
\frac{\sum\limits_{i=1}^{22} a_i a_{i+1}}{(\sum\limits_{i=1}^{22} a_i)^2} &= \frac{\sum\limits_{i=1}^{22}(a_i - M)(a_{i+1} - m) + (m + M)\sum\limits_{i=1}^{22} a_i - 22mM}{(\sum\limits_{i=1}^{22} a_i)^2} \\
&\le \frac{-(M - m)^2 + (m + M)\sum\limits_{i=1}^{22} a_i - 22mM}{(\sum\limits_{i=1}^{22} a_i)^2} \\
&= \frac{-(M - m)^2 + (m + M)S - 22mM}{S^2} \\
&\le \frac{(m + M)^2}{4(22mM + (M - m)^2)} \\
&= \frac{m^2 + M^2 + 2mM}{4(m^2 + M^2 + 20mM)} \\
&\le \frac{1}{20}.
\end{aligned}$$

当 $a_1 = a_2 = \ldots = a_{14} = 1, a_{15} = a_{16} = \ldots = a_{22} = 2$ 时取等.

注. 解答中设出 $a_1, \ldots, a_{22}$ 的最大、最小值是不容易想到的. 另一个比较自然的思路是用调整法.

问题 3. 已知 $a_0=0$，a_1 为正整数. 对整数 $n\geq 2$，a_n 为使得 $a_0,a_1,\dots,a_{n-1}$ 模 a_n 两两不同的最小正整数.

(1) 当 $a_1=2023$ 时，求 a_{10000} 的值.

(2) 已知 $a_t\leq \frac{a_1}{2}$，求 $\frac{t}{a_1}$ 的最大可能值.

解答 (王正供题)

设 $a_1=n$. 对任意 $i<j$，由于 $a_j\nmid a_i-a_0$，因此 $a_j\neq a_i$. 即数列 $\{a_i\}$ 中的项两两不同. 下面我们先来证明几个结论：

结论 1. 数列 $\{a_i\}$ 从第二项起单增.

结论 1 的证明. 反正，若不单增，则存在 $i\geq 2$ 使得 $a_{i+1}<a_i$，注意到 $a_1,\dots,a_{i-1}$ 模 a_{i+1} 两两不同，因此 a_i 不是满足条件的最小整数，与数列的定义矛盾.

结论 2. 若 $a_i<n$，$a_{i+1}>n$，则 $a_{i+k}=n+k(\forall k\in\mathbb{N}^+)$.

结论 2 的证明. 由结论 1 可知 $a_2,\dots,a_i<n$，因此 $a_0,a_1,\dots,a_i$ 模 $n+1$ 两两不同，由 a_{i+1} 的最小性可知 $a_{i+1}=n+1$. 对 k 归纳同理可知 $a_{i+k}=n+k$.

记数列 $\{a_i\}$ 中所有项构成的集合为 S.

结论 3. 对 $k<n$，若 n 除以 k 的余数为 r，则 k 和 r 恰有一个属于 S.

结论 3 的证明. 若 $r\in S$，设 $a_i=r$. 由于 $k>r$ 及结论 1，我们有 $a_0,a_1,\dots,a_i\neq k$，由于 $n\equiv r(\bmod k)$，即 $a_1\equiv a_i(\bmod k)$，因此 $a_{i+1},a_{i+2},\dots\neq k$，故 $k\notin S$.

若 $r\notin S$，设 $a_i<k\leq a_{i+1}$. 因为 $a_0,a_2,a_3,\dots,a_i<k$，故他们两两模 k 不同余. 又由于 0 到 $k-1$ 中与 n 模 k 同余的数只有 r，因此 $a_0,a_2,a_3,\dots,a_i$ 均与 a_1 模 k 不同余，因此 $a_0,a_1,\dots,a_i$ 模 k 两两不同余，由 a_{i+1} 的最小性可知 $a_{i+1}=k$，故 $k\in S$.

综上，结论 3 成立.

回到原题.

第一问. 由结论 3，对于 $k>\frac{n}{2}$，k 和 $n-k$ 恰有一个在 S 中. 因此 1 到 2022 中共有 1011 个数在 S 中，因此 $a_{1012}<2023<a_{1013}$，由结论 2 可知 $a_{10000}=11011$.

第二问. 注意到当 $a_1=7$，$t=3$ 时满足题目条件，此时 $\frac{t}{a_1}=\frac{3}{7}$. 下面证明 $\frac{3}{7}$ 为最大可能值.

对于 $\lceil\frac{n+1}{3}\rceil\leq k\leq\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$，$n$ 除以 k 的余数为 $n-2k$，由结论 3 可知 k 和 $n-2k$ 恰一个不属于 S. 因此 $0,1,2,\dots,\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$ 中至少 $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor-\lceil\frac{n+1}{3}\rceil+1$ 个数不属于 S，因此 $0,1,2,\dots,\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$ 中至多 $\lceil\frac{n+1}{3}\rceil$ 个数属于 S. 又因为 $a_0,a_1,\dots,a_t$ 中除 a_1 外均不超过 $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$，故 $t\leq\lceil\frac{n+1}{3}\rceil\leq\frac{n}{3}+1$.

因此当 $n\geq 11$ 时，$\frac{t}{n}\leq\frac{\frac{n}{3}+1}{n}=\frac{1}{3}+\frac{1}{n}<\frac{3}{7}$. 而 $n=1,2,\dots,10$ 时，$\frac{t}{n}$ 的最大值分别为 $0,0,0,0,\frac{2}{5},0,\frac{3}{7},\frac{2}{8},\frac{3}{9},\frac{3}{10}$，均不超过 $\frac{3}{7}$. 综上，最大值为 $\frac{3}{7}$.

问题 4. 求最小的 n，使得对任意有 1000 个顶点且每个顶点度均为 4 的简单图 G，都一定可以从中去掉 n 条边，使 G 变为二部图.

解答 (王正供题) 答案为 800.

构造. 当 G 为 200 个 K_5 时，易知每个 K_5 至少去掉 4 条边才可以变成二部图，故一共至少去掉 800 条边. 因此 $n \geq 800$.

下面给出两种方法证明 $n = 800$ 满足题意：

证法 1. 由于图 G 每个顶点的度均为 4，因此可以将 G 的所有顶点染为 5 种颜色 $C_1, \ldots, C_5$(每种颜色至少一个点)，使得同色点互不相邻. 设两端点颜色分别为 C_i, C_j 的边有 $f(C_i, C_j)$ 条.

对于任意两种颜色 C_i, C_j，从 G 中留下所有一个端点颜色为 C_i 或 C_j、另一个端点颜色不为 C_i, C_j 的边，其余边均去掉，则 G 变成二部图 (两部分分别为：这两种颜色的点、所有其余点). 该过程共去掉的边数为

$$N_{i,j} = \sum_{k,l \in \{i,j\} \text{或} k,l \notin \{i,j\}} f(C_k, C_l).$$

将所有 $N_{i,j}$ 求和，每个 $f(C_k, C_l)$ 均出现 4 次，所以

$$\sum_{1 \leq i < j \leq 5} N_{i,j} = 4 \sum_{1 \leq k < l \leq 5} f(C_k, C_l) = 8000,$$

上式左端一共 10 个 $N_{i,j}$ 求和，因此必存在某个 $N_{i,j} \leq 800$，故可去掉 800 条边使 G 变为二部图.

证法 2. 记 C_i 为图 G 的 i 阶星形导出子图 (具体的说，C_i 由一个顶点 A 和 $i-1$ 个顶点 $B_1,\dots,B_{i-1}$ 构成，满足 $B_1,\dots,B_{i-1}$ 均与 A 相邻，且 $B_1,\dots,B_{i-1}$ 之间两两不相邻. 点 A 成为 C_i 的中心)，下文简称为“星形”.

引理. 图 G 中,可将图 G 的全部顶点划分为互相无公共顶点的星形 $C_{i_1},\dots,C_{i_k}(i_1,\dots,i_k\geq 1,k\leq 600)$.

引理的证明. 我们只需证明，对于 m 个点的连通分支 (显然 $m\geq 5$)，其顶点可以划分为不超过 $\frac{3m}{5}$ 个星形.

下面归纳证明更强的结论：对于任意 m 个点的连通图 $G'(m\in\mathbb{N}^+)$，可将所有顶点划分为不超过 $\lceil\frac{m}{2}\rceil$ 个星形.

显然 $m=1,2$ 时结论成立. 假设结论对 $1,2,\dots,m-1$ 成立，下面证明结论对 m 也成立.

取生成树 T，任取点 R 作为树根，取 T 的一个距离树根最远的叶子 A，设 B 为树 T 中唯一与 A 相邻的顶点. 记所有与 B 相邻的叶子构成的集合为 S.

情况 1. 若 G' 中有两个 S 中的点 A,B 相邻，则 A,B 构成星形. G' 去掉顶点 A,B 后还连通，由归纳假设可分成不超过 $\lceil\frac{m-2}{2}\rceil$ 个星形. 故 G' 可分成不超过 $\lceil\frac{m}{2}\rceil$ 个星形.

情况 2. 若 S 中的点互不相邻，则 $S\cup\{B\}$ 构成星形. G' 去掉 $S\cup\{B\}$ 中顶点后还连通，由归纳假设可分成不超过 $\lceil\frac{m-|S|-1}{2}\rceil$ 个星形. 故 G' 可分成不超过 $\lceil\frac{m-|S|+1}{2}\rceil\leq\lceil\frac{m}{2}\rceil$ 个星形.

综上，结论对 m 成立. 由第二数学归纳法，引理成立.

回到原题，依次把 $C_{i_1},\dots,C_{i_k}$ 放入 X,Y 两组 (初始时 X,Y 均为空集).

记端点在同组的边 (简称为同组边) 的数量为 s_1，端点在不同组的边 (简称为异组边) 的数量为 s_2(如果一条边的某个顶点还没有放入 X,Y，则不计算该边). 我们考察每次放入一个星形 C_{i_j} 时，s_2 的变化量 Δ_1 和 s_2 的变化量 Δ_2，以及 s_2-s_1 的变化量 Δ.

对于星形 C_{i_j}，设其中心为 A，其余点为 $T=\{B_1,\dots,B_{i_j-1}\}$. 设从 A 到 X 中的点共连有 x_1 条边，从 A 到 Y 中的点共连有 y_1 条边，从 T 到 X 中的点共连有 x_2 条边，从 T 到 Y 中的点共连有 y_2 条边.

如果 $x_1+y_2\geq x_2+y_1$，则我们将 A 放入 Y，T 中所有顶点放入 X；如果 $x_1+y_2\leq x_2+y_1$，则我们将 A 放入 X，T 中所有顶点放入 Y. 易知这样放时，$\Delta_2\geq\Delta_1+i_j-1$(其中加了 i_j-1 是因为星形中的 i_j-1 条边均为异组边)，即 $\Delta\geq i_j-1$.

因此按照上面的方法将所有顶点放入 X,Y 后，最终

$$s_2-s_1\geq\sum_{j=1}^{k}(i_j-1)\geq 1000-600\geq 400,$$

又因为 $s_2+s_1=2000$，故 $s_1\leq 800$，即同组边不超过 800 条. 将同组边去掉后，图 G 变为二部图. 故 $n=800$ 满足题目条件.

注. 证法 2 的思路可以解决另一个版本的问题：求最小的 n，使得对任意有 1000 个顶点 2000 条边的图 G 的简单连通图 G，都一定可以从中去掉 n 条边，使 G 变为二部图. (该题的构造很有趣，但因为难度考虑没有采用这个版本.)