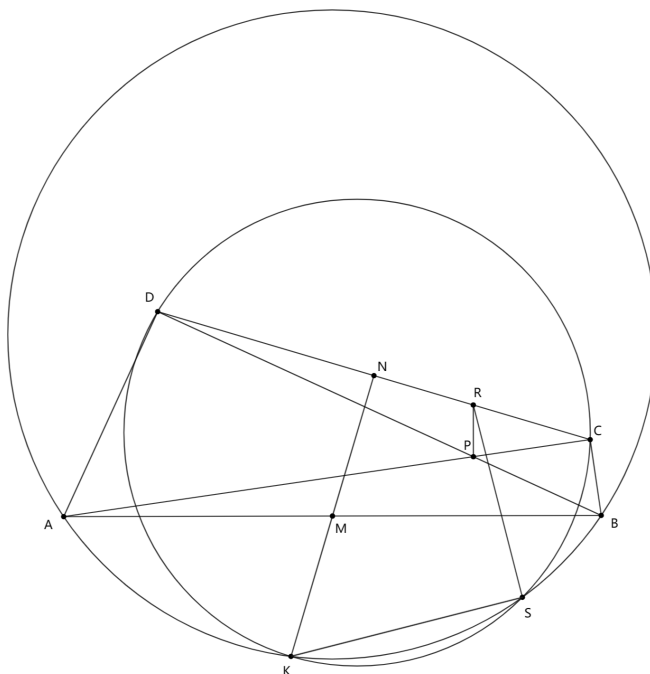


第十二届学而思数学竞赛联考

二试

时间：170 分钟

问题 1. 如图, 已知四边形 $ABCD$ 满足 $\angle ADB = \angle ACB = 90^\circ$, 设 AC 和 BD 的交于点 P , 点 R 在 CD 上且 $RP \perp AB$. M 、 N 分别为 AB 、 CD 的中点, K 为 NM 延长线上一点, $\triangle DKC$ 外接圆与 $\triangle AKB$ 外接圆交于点 S . 求证: $KS \perp SR$.



问题 2. 已知 $a_1, a_2, \dots, a_{22} \in [1, 2]$, 求

$$\frac{\sum_{i=1}^{22} a_i a_{i+1}}{\left(\sum_{i=1}^{22} a_i\right)^2}$$

的最大值. (其中 $a_{23} = a_1$)

问题 3. 已知 $a_0 = 0$, a_1 为正整数. 对整数 $n \geq 2$, a_n 为使得 a_0, a_1, \dots, a_{n-1} 模 a_n 两两不同的最小正整数.

- (1) 当 $a_1 = 2023$ 时, 求 a_{10000} 的值.
- (2) 已知 $a_t \leq \frac{a_1}{2}$, 求 $\frac{t}{a_1}$ 的最大可能值.

问题 4. 求最小的 n , 使得对任意有 1000 个顶点且每个顶点度均为 4 的简单图 G , 都一定可以从中去掉 n 条边, 使 G 变为二部图.