2023 广东珠海中考二模第 23 (3) 题

导言

广东彭秋明, "2023 年珠海市中考二模数学试卷第 23 题压轴题区分度好, 题目设计新颖创新度好好哟, 符合新课标的变化要求. "

其中第 (3) 问如下, 但只剩下计算, 不难.

问题

如图 1, 点 A 是射线 BC 上一动点 (点 A 不与点 B 重合). 点 Q 在 BP 的延长线上, 且 $PQ=4$, $PB=5$, $\tan B=2$. 当 $\angle PAQ$ 最大时, 证明: $\angle PAQ=90^\circ-\angle B$.

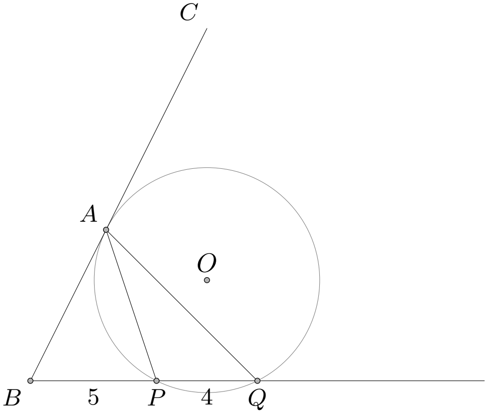

图 1

由原题 (1)(2) 两问的铺垫, 当 $\triangle APQ$ 的外接圆 $\odot O$ 与射线 BC 相切时, $\angle PAQ$ 最大.

原题前两问, 已经直接揭示, 稍感遗憾.

解析

证: 如图 2, 设 A 在 BP 上的射影为 H. 连 AO 并延长交 BP 于 R, 则 $\angle BAR = 90^\circ$.

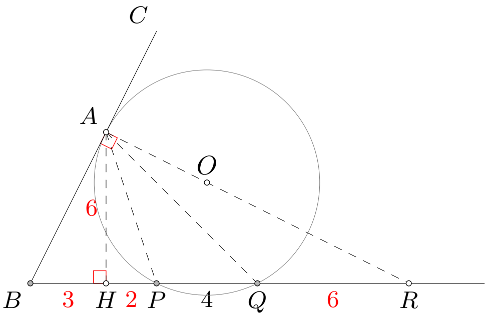

图 2

由 $\tan B = 2$, 得 $\mathrm{Rt}\triangle ABR$ 三边之比为

$$AB : AR : BR = 1 : 2 : \sqrt{5}.$$

由切割线定理, 得

$$BA = \sqrt{BP \cdot BQ} = \sqrt{5 \times (5+4)} = 3\sqrt{5}.$$

而 $\triangle HBA \backsim \triangle ABR$, 故

$$BH = 3, AH = 6, BR = 15, HP = 2, PR = 10.$$

从而

$$PA^2 = AH^2 + HP^2 = 40,$$

$$PQ \cdot PR = 4 \times 10 = 40,$$

故

$$PA^2 = PQ \cdot PR.$$

故 $\triangle PAQ \backsim \triangle PRA$. 进而

$$\angle PAQ = PRA = 90^\circ - \angle B. \qquad \square$$

注 1: $\angle PAQ$ 最大, 可由由圆外角、圆周角、圆内角的大小关系比较后确定. 是否应让学生自己探究得到?

注 2: 熟悉余弦定理, 辅助线 AH 则不用作, 即可求出 AP^2.

注 3: 尺规作图题:

如图 3, $\angle B$ 的一边上有两点 P, Q. 求作: 点 A, 使其在 $\angle B$ 的另一边 BC 上, 且 $\angle PAQ$ 最大.

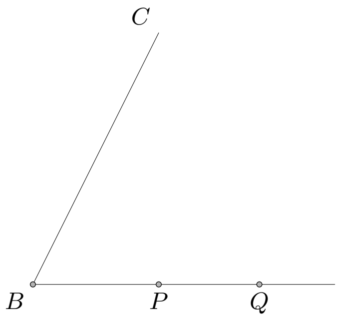

图 3

如图 4, 作图的关键是, 只要作出 BP, BQ 的比例中项即可.

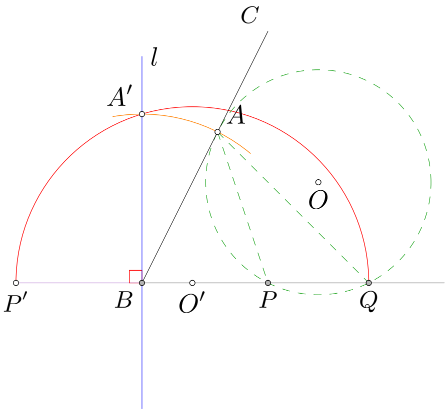

图 4