

2023 波兰初中教学奥林匹克

题 1

是否存在实数 x, y, z , 使得

$$x + \frac{1}{y} = z, \quad y + \frac{1}{z} = x, \quad z + \frac{1}{x} = y.$$

题 2

正整数 a, b 满足 $a > b > 1$, 且 b 是 a 除自身外最大的约数. 求证: $a + b$ 不是 2 的正整数次幂.

题 3

给定三角形 ABC , 其中 $AC < BC$, $\angle ACB = 60^\circ$. 点 D 在线段 AC 上, 且 D 异于 A , 满足 $AB = BD$; 点 E 在直线 BC 上, 且 E 异于 B , 满足 $AB = AE$.

求证: $\angle DEC = 30^\circ$.

题 4

n 为正奇数, 将 n 个箭头从左到右依次排列, 每个箭头指向左边或右边. 求证: 存在一个箭头, 其指向的箭头个数与指向其的箭头个数相同.

注: 例如, $n = 5$ 时, 在排列 $\rightarrow \rightarrow \leftarrow \leftarrow \rightarrow$ 中, 每个箭头所指向的箭头个数依次为 4, 3, 2, 3, 0.

题 5

求所有正整数 m, n , 使得 $\underbrace{33 \cdots 3}_{m \text{ 个 } 3} \underbrace{66 \cdots 6}_{n \text{ 个 } 6}$ 是完全平方数.