

中国数学奥林匹克预赛北京赛区预赛

2023

一试

2023年5月21日8:00-9:20

前8题每题8分,第9题16分,第10,11题每题20分

错误难免,不吝指正.

题 1.1 (2023 北京预赛一试, 第 11-1 题)

如图 1, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC$, $AD \perp CE$, $BE \perp CE$, 垂足分别是 D, E . 已知 $AD = 8$, $BE = 3$, 则 $DE = \underline{\hspace{2cm}}$.

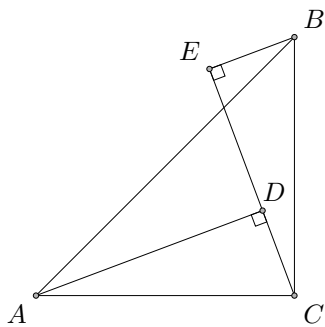


图 1

答案

5.

解析

解: 易知 $\triangle ACD \cong \triangle CBE$. 故 $CE = AD = 8$, $CD = BE = 3$. 从而 $DE = CE - CD = 5$. \square

题 1.2 (2023 北京预赛一试, 第 11-2 题)

S 是集合 $\{1, 2, \dots, 2023\}$ 的子集, 满足任意两个元素的平方和不是 9 的倍数, 则 $|S|$ 的最大值是 $\underline{\hspace{2cm}}$ (这里 $|S|$ 表示 S 的元素个数).

答案

1350.

解析

解: 整数 x 及其平方 x^2 模 9 的余数情况如下表:

$x \pmod{9}$	0	± 1	± 2	± 3	± 4
$x^2 \pmod{9}$	0	1	4	0	7

由此可知, $\left\lfloor \frac{2023}{3} \right\rfloor = 674$ 个 3 的倍数只能任选 1 个, 其它所有数均可选入.
故 $|S|_{\max} = 2023 - 674 + 1 = 1350$. \square

题 1.3 (2023 北京预赛一试, 第 11-3 题)

已知函数 $f(x) = \sin \omega x + \sin 2x$, 其中 $\omega \in \mathbb{N}_+$, $\omega \leq 2023$. 若 $f(x) < 2$ 恒成立, 则满足题设的常数 ω 的个数为 _____.

答案

1770.

解析

解: 只要考虑 $\sin 2x = 1 \iff x = \left(k + \frac{1}{4}\right)\pi$ 时, $\sin \omega x = \sin \frac{\omega(4k+1)\pi}{4} \neq 1$.

只须 $\omega(4k+1) \not\equiv 2 \pmod{8} \iff \omega \not\equiv 2 \pmod{8}$.

而在 $1, 2, \dots, 2023$ 中模 8 余 2 的数有 253 个, 故所求数目为 $2023 - 253 = 1770$. \square

题 1.4 (2023 北京预赛一试, 第 11-4 题)

已知集合 $A = \{1, 2, 3\}$, 映射 $f: A \rightarrow A$, 且满足对任意 $x \in A$, 有 $f(f(x)) \geq x$, 则这样的 f 有 _____ 个.

答案

13.

解析

解: 列树状图分析:

情形一: $f(1) = 1 \implies \begin{cases} f(2) = 2 \implies f(3) = 3, \\ f(2) = 3 \implies f(3) = 2 \text{ 或 } 3; \end{cases}$

情形二: $f(1) = 2 \implies \begin{cases} f(2) = 1 \implies f(3) = 3, \\ f(2) = 2 \implies f(3) = 3, \\ f(2) = 3 \implies f(3) = 2 \text{ 或 } 3; \end{cases}$

情形三: $f(1) = 3 \implies \begin{cases} f(2) = 1 \implies f(3) = 1 \text{ 或 } 3, \\ f(2) = 2 \implies f(3) = 1 \text{ 或 } 3, \\ f(2) = 3 \implies f(3) = 2 \text{ 或 } 3. \end{cases}$

这样的 f 一共有 13 个. \square

题 1.5 (2023 北京预赛一试, 第 11-5 题)

已知向量 $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, 且 \vec{a}, \vec{b} 夹角为 120° . 若 $\vec{a} + t\vec{b}$ 与 $t\vec{a} + \vec{b}$ 的夹角为锐角, 则 t 的取值范围是 _____.

答案

$$\left(\frac{5 - \sqrt{21}}{2}, 1\right) \cup \left(1, \frac{5 + \sqrt{21}}{2}\right).$$
解析

解: 由题意, 得 $(\vec{a} + t\vec{b})(t\vec{a} + \vec{b}) > 0$ 且 $t \neq 1$. 即 $t - 1 - t^2 + 4t > 0$ ($t \neq 1$).

解得 $\frac{5 - \sqrt{21}}{2} < t < 1$ 或 $1 < t < \frac{5 + \sqrt{21}}{2}$. \square

题 1.6 (2023 北京预赛一试, 第 11-6 题)

设实数 x, y 满足 $\begin{cases} x^3 - 3x^2 + 2026x = 2023, \\ y^3 + 6y^2 + 2035y = -4053, \end{cases}$ 则 $x + y =$ _____.

答案

-1.

解析

解: 原方程组变形为

$$\begin{cases} (1-x)^3 + 2023(1-x) = 1, \\ (y+2)^3 + 2023(y+2) = 1. \end{cases}$$

由于函数 $f(t) = t^3 + 2023t$ 在 \mathbb{R} 上单调, 故 $y+2 = 1-x$. 即 $x+y = -1$. \square

题 1.7 (2023 北京预赛一试, 第 11-7 题)

已知在 $\triangle ABC$ 中, $a = 2b$, $\cos B = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, 则 $\sin \frac{A-B}{2} + \sin \frac{C}{2} =$ _____.

答案

$\frac{\sqrt{10}}{3}$.

解析

解: 我们记

$$\sin \frac{A}{2} := m > 0, \quad \cos \frac{A}{2} := n > 0, \quad \sin \frac{B}{2} := x > 0, \quad \cos \frac{B}{2} := y > 0,$$

则有 $m^2 + n^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 1$. 所以

$$\sin \frac{A-B}{2} + \sin \frac{C}{2} = \sin \frac{A-B}{2} + \cos \frac{A+B}{2} = my - nx + ny - mx = (n+m)(y-x).$$

由正弦定理, 得 $2 = \frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B} = \frac{2mn}{2xy} \implies mn = 2xy$.

由 $\cos B = 1 - 2x^2 = \frac{2\sqrt{2}}{3} \implies x^2 = \frac{3-2\sqrt{2}}{6}$ ($x > 0$) $\implies x = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{6}}, y = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{6}}$.

所以 $(n+m)^2 = m^2 + n^2 + 2mn = 1 + 4xy = \frac{5}{3}$ ($n > 0, m > 0$) $\implies n+m = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$.

综上, 原式 $= \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{10}}{3}$. \square

题 1.8 (2023 北京预赛一试, 第 11-8 题)

使得 $n^2 + 2023n$ 为平方数的正整数 n 的最小值是 _____.

答案

425.

解析

解: 设 $n^2 + 2023n = m^2$, 其中 $m \in \mathbb{Z}_{>0}$, 则

$$(2n+2023)(2n-2023) = 7^2 \times 17^4. \quad (1)$$

注意到 $7^2 \times 17^4$ 的正约数从小到大依次为

$$1, 7, 17, 7^2, 7 \times 17, 17^2, 7^2 \times 17, 7 \times 17^2, \\ 17^3, 7^2 \times 17^2, 7 \times 17^3, 17^4, 7^2 \times 17^3, 7 \times 17^4, 7^2 \times 17^4.$$

当 n 取到最小时, (1) 式左边两因式之和 $4n + 2023 \times 2$ 取到最小, 又 $2n + 2m + 2023 > 2023 = 7 \times 17^2$, 故 $4n + 2023 \times 2 = 17^3 + 7^2 \times 17$. 解得 $n = 425$. \square

题 1.9 (2023 北京预赛一试, 第 11-9 题)

已知 a, b 为正整数, $a < b$, 且 a, b 互质. 若关于 x, y 的不等式 $ax + by \leq ab$ 有且仅有 2023 组正整数解, 则 $(a, b) =$ _____ (求出满足题意的所有可能数组).

答案

$(a, b) = (2, 4047), (3, 2024), (8, 579)$, 或 $(18, 239)$.

解析

解: 由 $ax + by \leq ab \implies y \leq -\frac{a}{b}x + a$, 根据题意, 得

$$\sum_{x=1}^{b-1} \left(\left\lfloor a - \frac{a}{b}x \right\rfloor \right) = 2023. \\ \frac{(a+1)(b+1) - 2(a+b)}{2} = 2023. \\ (a-1)(b-1) = 2 \times 7 \times 17^2.$$

$a-1$	1	2	7	14	17	34
$b-1$	4046	2023	578	289	238	119
(a, b)	(2, 4047)	(3, 2024)	(8, 579)	(15, 290)	(18, 239)	(35, 120)
a, b 是否互质	是	是	是	否	是	否

综上, 所求 $(a, b) = (2, 4047), (3, 2024), (8, 579)$, 或 $(18, 239)$. \square

题 1.10 (2023 北京预赛一试, 第 11-10 题)

已知 x 是一个锐角, 那么 $\frac{8}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$ 的最小值是 _____.

答案

$5\sqrt{5}$.

解析

解法 1: 由柯西不等式, 得

$$\left(\frac{8}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} \right) (2 \sin x + \cos x) \geq 25. \\ \frac{8}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} \geq \frac{25}{2 \sin x + \cos x} = \frac{25}{\sqrt{5} \sin(x+\theta)} \geq 5\sqrt{5}.$$

当 $\sin x = \frac{2}{\sqrt{5}}, \cos x = \frac{1}{\sqrt{5}}$ 等号成立. 故所求最小值为 $5\sqrt{5}$. \square

解法 2: 设 $m = \frac{8}{\sin x}, n = \frac{1}{\cos x}$, 则 $\sin x = \frac{8}{m}, \cos x = \frac{1}{n}$. 故 $\frac{64}{m^2} + \frac{1}{n^2} = 1$. 由权方和不等式, 得

$$1 = \frac{64}{m^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{4^3}{m^2} + \frac{1^3}{n^2} \geq \frac{(4+1)^3}{(m+n)^2}.$$

故 $m+n \geq 5\sqrt{5}$. 后略. \square

题 1.11 (2023 北京预赛一试, 第 11-11 题)

现有 11 位同学报名博物馆的志愿讲解活动, 活动从上午 9 点开始到下午 5 点结束, 每小时安排一场公益小讲堂, 每场需要 1 位同学为参观的游客提供讲解服务. 为避免同学们劳累, 馆方在排班时不会让同一人连续讲解 2 场, 并且第一场与最后一场需要两位不同的同学负责. 则馆方共有 _____ 种排班方式.

答案

100000010.

解析

解: 设讲解 n 小时, 馆方有 a_n ($n = 1, 2, \dots, 8$) 种排班方式.

则 $a_1 = 11$, $a_2 = 11 \times 10 = 110$, $a_3 = 11 \times 10 \times 9 = 990$. 当 $n \geq 4$ 时, $a_n = 9a_{n-1} + 10a_{n-2}$.

记 $b_1 = 110$, $b_2 = 990$, $b_n = 9b_{n-1} + 10b_{n-2}$ ($n \geq 3$). 由特征根法, 得 $b_n = 10^{n+1} - 10 \cdot (-1)^n$.

故 $a_8 = b_7 = 10^8 + 10 = 100000010$. □