n 除以 11 的余数趣题

华南师范大学　吴　康

§1. 正整数 n 模 p 同余定理

约定一律使用十进制. 本文承接文 [1][2].

把文 [1] 定理 1、文 [2] 定理 2 再推广, 我们可证明定理 3(证略):

定理 3 $$n \equiv f_k(n) \equiv g_k(n) \pmod{p},$$

其中 n, k, p 为正整数, $p \mid \left(10^k - 1\right)$, $f_k(n)$ 为 n 的 k 分段 (之各段) 和, $g_k(n)$ 为 n 的任意 k 倍分段 (之各段) 和.

我们还可以证明定理 4 (证略):

定理 4 $$n \equiv h_k(n) \pmod{p},$$

其中 n, k, p 为正整数, $p \mid \left(10^k + 1\right)$, $h_k(n)$ 为 n 的 k 分段 (之各段) 交替和.

注: n 的 k 分段交替和 $h_k(n)$ 为 n 的 k 分段中, 自右至左奇数段的和与偶数段的和之差, 即若 n 的 k 分段为

$$n = \overline{A_m A_{m-1} \cdots A_3 A_2 A_1}$$

时,

$$h_k(n) = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \cdots + (-1)^{m-1} A_m.$$

§2. 正整数 n 模 11 同余定理

定理 3A $\quad n \equiv f_2(n) \equiv g_2(n) \pmod{11}$.

定理 4A $\quad n \equiv h_{2r-1}(n) \pmod{11}$, 其中 $r \in \mathbb{N}^*$.

证: 因 $11 \mid \left(10^2 - 1\right)$, 由定理 3 可得定理 3A. 因 $11 \mid \left(10^{2r-1} + 1\right)$, 由定理 4 可得定理 4A.

§3. n 除以 11 的余数趣题选解

以下问题均为笔者新拟.

题 11. 设 A 为数列 $1, 2, \cdots, 2023$, 求 n_A (A 的各项依次排列组成的正整数, 下同) 除以 11 的余数 x.

简解: 由文 [2] 题 6 知 $n_A \equiv 46 \pmod{99} \Longrightarrow n_A \equiv 46 \equiv 2 \pmod{11} \Longrightarrow x = 2$.

题 12. 设 A 为数列 $1^2, 2^2, \cdots, 2023^2$, 求 n_A 除以 11 的余数 x.

简解: 设数列

$$B: 1^2, 2^2, \cdots, 9^2;$$

$$C: 10^2, 11^2, \cdots, 31^2;$$

$$D: 32^2, 33^2, \cdots, 99^2;$$

$$E: 100^2, 101^2, \cdots, 316^2;$$

$$F: 317^2, 318^2, \cdots, 999^2;$$

$$G: 1000^2, 1001^2, \cdots, 2023^2,$$

则 (mod11) 时:

1° $$n_G \equiv h_7(n_G) \equiv \sum_{j=0}^{1023} (-1)^j (2023 - j)^2$$

$$\equiv \sum_{i=500}^{1011} \left[(2i+1)^2 - (2i)^2\right]$$

$$\equiv \sum_{i=500}^{1011} (4i+1) \equiv (2001 + 4045) \div 2 \times 512 \equiv 10;$$

2° $$n_F \equiv f_6(n_F) \equiv \sum_{i=317}^{999} i^2$$

$$\equiv 999 \times 1000 \times 1999 \div 6 - 316 \times 317 \times 633 \div 6$$

$$\equiv 4;$$

$$3^\circ \quad n_E \equiv h_5(n_E) \equiv \sum_{j=0}^{316} (-1)^j (316-j)^2$$

$$\equiv \sum_{i=51}^{158} \left[(2i)^2 - (2i-1)^2\right] + 100^2$$

$$\equiv \sum_{i=51}^{158} (4i-1) + 1 \equiv (203+631) \div 2 \times 108 + 1$$

$$\equiv 3;$$

$$4^\circ \quad n_D \equiv f_4(n_D) \equiv \sum_{i=32}^{99} i^2$$

$$\equiv 99 \times 100 \times 199 \div 6 - 31 \times 32 \times 63 \div 6 \equiv 1;$$

$$5^\circ \quad n_C \equiv h_3(n_C) \equiv \sum_{j=0}^{21} (-1)^j (31-j)^2$$

$$\equiv \sum_{i=5}^{15} \left[(2i+1)^2 - (2i)^2\right]$$

$$\equiv (21+61) \div 2 \times 11 \equiv 0;$$

$6^\circ \quad n_B \equiv 2.$

从而, 令 $\overline{n_B n_C n_D n_E} = P$, $\overline{n_F n_G} = Q$, 则 (mod11) 时:

$$Q \equiv g_2(Q) \equiv n_F + n_G \equiv 4 + 10 \equiv 3;$$

$$10P \equiv g_2(10P) \equiv n_B + n_C + n_D + 10n_E$$

$$\equiv 2 + 0 + 1 + 30 \equiv 0 \Longrightarrow P \equiv 0;$$

$$n_A \equiv g_2(n_A) \equiv P + Q \equiv 0 + 3 \equiv 3.$$

于是 $\quad x = 3.$

题 12A. 设 A 为数列 $1\times 2, 2\times 3, 3\times 4, \cdots, 2023\times 2024$, 求 n_A 除以 11 的余数 x.

留给感兴趣的读者.

参考文献:

[1] 吴　康. n 除以 9 的余数趣题 [J]. “数学风”公众号, 2023-04-18.

[2] 吴　康. n 除以 99 和 999 的余数趣题 [J]. “数学风” 公众号, 2023-04-26.

(2023-05-05 于华南师大)