2023 中国数学奥林匹克预赛北京赛区预赛一试试题参考解答

2023 年 5 月 21 日 8 : 00 – 9 : 20

前 8 题每题 8 分, 第 9 题 16 分, 第 10, 11 题每题 20 分

错误难免, 不吝指正.

题 1

如图 1, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC$, $AD \perp CE$, $BE \perp CE$, 垂足分别是 D, E. 已知 $AD = 8$, $BE = 3$, 则 $DE =$ ________.

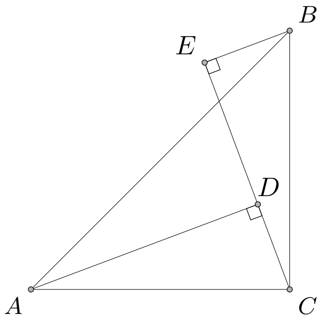

图 1

答案

5.

解析

解: 易知 $\triangle ACD \cong CBE$.

故 $CE = AD = 8$, $CD = BE = 3$.

从而 $DE = CE - CD = 5$. □

题 2

S 是集合 $\{1,2,\cdots,2023\}$ 的子集, 满足任意两个元素的平方和不是 9 的倍数, 则 $|S|$ 的最大值是 ________(这里 $|S|$ 表示 S 的元素个数).

答案

1350.

解析

解: 整数 x 及其平方 x^2 模 9 的余数情况如下表:

$x \pmod 9$	0	±1	±2	±3	±4
$x^2 \pmod 9$	0	1	4	0	7

由此可知, $\left\lfloor\dfrac{2023}{3}\right\rfloor=674$ 个 3 的倍数只能任选 1 个, 其它所有数均可选入.

故 $|S|_{\max}=2023-674+1=1350$. $\square$

题 3

已知函数 $f(x)=\sin\omega x+\sin 2x$, 其中 $\omega\in\mathbb{N}_+$, $\omega\leqslant 2023$. 若 $f(x)<2$ 恒成立, 则满足题设的常数 ω 的个数为 ________.

答案

1770.

解析

解: 只要考虑 $\sin 2x=1 \iff x=\left(k+\dfrac{1}{4}\right)\pi$ 时,

$$\sin\omega x=\sin\frac{\omega(4k+1)\pi}{4}\neq 1.$$

只须 $\omega(4k+1)\not\equiv 2 \pmod 8 \iff \omega\not\equiv 2 \pmod 8$.

而在 $1,2,\cdots,2023$ 中模 8 余 2 的数有 253 个, 故所求数目为 $2023-253=1770$. □

题 4

已知集合 $A=\{1,2,3\}$, 映射 $f:A\to A$, 且满足对任意 $x\in A$, 有 $f\big(f(x)\big)\geqslant x$, 则这样的 f 有 ________ 个.

答案

13.

解析

解: 分情况讨论:

(1) 当 $f(1)=1$ 时,

$$\Longrightarrow\begin{cases} f(2)=2 \Longrightarrow f(3)=3, \\ f(2)=3 \Longrightarrow f(3)=2\text{ 或 }3; \end{cases}$$

(2) 当 $f(1)=2$ 时,

$$\Longrightarrow\begin{cases} f(2)=1 \Longrightarrow f(3)=3, \\ f(2)=2 \Longrightarrow f(3)=3, \\ f(2)=3 \Longrightarrow f(3)=2\text{ 或 }3; \end{cases}$$

(3) 当 $f(1)=3$ 时,

$$\Longrightarrow\begin{cases} f(2)=1 \Longrightarrow f(3)=1\text{ 或 }3, \\ f(2)=2 \Longrightarrow f(3)=1\text{ 或 }3, \\ f(2)=3 \Longrightarrow f(3)=2\text{ 或 }3. \end{cases}$$

这样的 f 一共有 13 个. □

题 5

已知向量 $|\vec{a}|=1$, $\left|\vec{b}\right|=2$, 且 $\vec{a},\vec{b}$ 夹角为 120°. 若 $\vec{a}+t\vec{b}$ 与 $t\vec{a}+\vec{b}$ 的夹角为锐角, 则 t 的取值范围是 ________.

答案

$$\left(\frac{5-\sqrt{21}}{2},1\right)\cup\left(1,\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right).$$

解析

解: 由题意, 得 $\left(\vec{a}+t\vec{b}\right)\left(t\vec{a}+\vec{b}\right)>0$ 且 $t\neq 1$. 即

$$t-1-t^2+4t>0\,(t\neq 1)\,.$$

解得 $\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}<t<1$ 或 $1<t<\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}$. □

题 6

设实数 x,y 满足 $\begin{cases}x^3-3x^2+2026x=2023,\\ y^3+6y^2+2035y=-4053,\end{cases}$ 则 $x+y=$ ________.

答案

-1.

解析

解: 原方程组变形为

$$\begin{cases}(1-x)^3+2023\,(1-x)=1,\\ (y+2)^3+2023\,(y+2)=1.\end{cases}$$

由于函数 $f(t)=t^3+2023t$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调, 故

$$y+2=1-x.$$

即 $x+y=-1$. $\square$

题 7

已知在 $\triangle ABC$ 中, $a=2b$, $\cos B=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, 则 $\sin\dfrac{A-B}{2}+\sin\dfrac{C}{2}=$ ________.

答案

$\dfrac{\sqrt{10}}{3}$.

解析

解: 我们记

$$\sin\frac{A}{2}:=m>0,\quad \cos\frac{A}{2}:=n>0,$$
$$\sin\frac{B}{2}:=x>0,\quad \cos\frac{B}{2}:=y>0,$$

则有 $m^2+n^2=1$, $x^2+y^2=1$. 所以

$$\begin{aligned}&\sin\frac{A-B}{2}+\sin\frac{C}{2}\\ &=\sin\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\\ &=my-nx+ny-mx\\ &=(n+m)(y-x).\end{aligned}$$

由正弦定理, 得

$$2=\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{2mn}{2xy}\implies mn=2xy.$$

由

$$\begin{aligned}\cos B = 1 - 2x^2 &= \frac{2\sqrt{2}}{3}\\ \Longrightarrow\ x^2 &= \frac{3-2\sqrt{2}}{6}\ (x>0)\\ \Longrightarrow\ x &= \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{6}}, y = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{6}}.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}(n+m)^2 &= m^2+n^2+2mn\\ &= 1+4xy = \frac{5}{3}\ (n>0, m>0)\\ \Longrightarrow\ n+m &= \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

综上, 原式 $= \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{10}}{3}$. □

题 8

使得 $n^2+2023n$ 为平方数的正整数 n 的最小值是 ________.

答案

425.

解析

解: 设 $n^2+2023n=m^2$, 其中 $m \in \mathbb{Z}_{>0}$, 则

$$(2n+2m+2023)(2n-2m+2023) = 7^2 \times 17^4. \qquad (1)$$

注意到 $7^2 \times 17^4$ 的正约数从小到大依次为

$1,\ 7,\ 17,\ 7^2,\ 7\times 17,\ 17^2,\ 7^2\times 17,\ 7\times 17^2,$

$17^3,\ 7^2\times 17^2,\ 7\times 17^3,\ 17^4,\ 7^2\times 17^3,\ 7\times 17^4,\ 7^2\times 17^4.$

当 n 取到最小时, (1) 式左边两因式之和 $4n+2023\times 2$

取到最小，又 $2n+2m+2023>2023=7\times17^2$，故 $4n+2023\times2=17^3+7^2\times17$. 解得 $n=425$. $\square$

题 9

已知 a,b 为正整数，$a<b$，且 a,b 互质. 若关于 x,y 的不等式 $ax+by\leqslant ab$ 有且仅有 2023 组正整数解，则 $(a,b)=$ ____________________(求出满足题意的所有可能数组).

答案

$(a,b)=(2,4047),(3,2024),(8,579)$，或 $(18,239)$.

解析

解： 由 $ax+by\leqslant ab \implies y\leqslant -\frac{a}{b}x+a$，根据题意，得

$$\sum_{x=1}^{b-1}\left(\left\lfloor a-\frac{a}{b}x\right\rfloor\right)=2023.$$

$$\frac{(a+1)(b+1)-2(a+b)}{2}=2023.$$

$$(a-1)(b-1)=2\times7\times17^2.$$

$a-1$	1	2	7	14	17	34
$b-1$	4046	2023	578	289	238	119

解得 $(a,b)=(2,4047)$，$(3,2024)$，$(8,579)$，$(15,290)$，$(18,239)$，$(35,120)$. 其中，$(15,290)$，$(35,120)$ 中 a,b 不互质，舍去.

综上，所求

$$(a,b)=(2,4047),(3,2024),(8,579),\text{ 或 }(18,239). \quad \square$$

题 10

已知 x 是一个锐角, 那么 $\dfrac{8}{\sin x}+\dfrac{1}{\cos x}$ 的最小值是 ________.

答案

$5\sqrt{5}$.

解析

解法 1: 由柯西不等式, 得

$$\left(\frac{8}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}\right)(2\sin x+\cos x)\geqslant 25.$$

$$\frac{8}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}\geqslant\frac{25}{2\sin x+\cos x}=\frac{25}{\sqrt{5}\sin(x+\theta)}\geqslant 5\sqrt{5}.$$

当 $\sin x=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos x=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ 等号成立.

故所求最小值为 $5\sqrt{5}$. □

解法 2: 设 $m=\dfrac{8}{\sin x}$, $n=\dfrac{1}{\cos x}$, 则 $\sin x=\dfrac{8}{m}$, $\cos x=\dfrac{1}{n}$. 故 $\dfrac{64}{m^2}+\dfrac{1}{n^2}=1$.

由权方和不等式, 得

$$1=\frac{64}{m^2}+\frac{1}{n^2}=\frac{4^3}{m^2}+\frac{1^3}{n^2}\geqslant\frac{(4+1)^3}{(m+n)^2}.$$

故 $m+n\geqslant 5\sqrt{5}$. 后略. □

题 11

现有 11 位同学报名博物馆的志愿讲解活动, 活动从上午 9 点开始到下午 5 点结束, 每小时安排一场公益小讲堂, 每场需要 1 位同学为参观的游客提供讲解服务. 为避免同学们劳累, 馆方在排班时不会让同一人连续讲解 2 场, 并且第一场与最后一场需要两位不同的同学负责. 则馆方共有

________ 种排班方式.

答案

100000010.

解析

解: 设讲解 n 小时, 馆方有 $a_n\,(n=1,2,\cdots,8)$ 种排班方式.

则 $a_1=11$, $a_2=11\times10=110$, $a_3=11\times10\times9=990$. 当 $n\geqslant4$ 时, $a_n=9a_{n-1}+10a_{n-2}$.

记 $b_1=110$, $b_2=990$, $b_n=9b_{n-1}+10b_{n-2}\,(n\geqslant3)$. 由特征根法, 得 $b_n=10^{n+1}-10\cdot(-1)^n$.

故 $a_8=b_7=10^8+10=100000010$. □