2023 北京预赛加试前两题

题 一

已知实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n > 0$, 求证:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_{i-1}}{a_i} \geqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{a_{i-1}+a_i+1}{a_i+a_{i+1}+1},$$

其中 $a_0 = a_n$, $a_{n+1} = a_1$.

解析

证: 首先证明下面的引理.

引理: 若实数 $b_1, b_2, \cdots, b_n > 0$, 则

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{b_{i-1}}{b_i} \geqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{b_{i-1}+1}{b_i+1}. \tag{1}$$

证明: 注意到

$$(1) \iff \sum_{i=1}^{n} \frac{b_{i-1}-b_i}{b_i} \geqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{b_{i-1}-b_i}{b_i+1}.$$

记 $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_{i-1}-b_i}{x+b_i}$ $(x > 0)$, 则

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i - b_{i-1}}{(x+b_i)^2} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{(x+b_i)^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{b_{i-1}}{(x+b_i)^2}. \end{aligned}$$

设 $\{b_n\}$ 的增序为 $c_1 \leqslant c_2 \leqslant \cdots \leqslant c_n$, 则

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{(x+b_i)^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{(x+c_i)^2}$$

是逆序和,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{b_{i-1}}{(x+b_i)^2}$$

是乱序和. 由排序不等式, 有

$$f'(x) \leqslant 0 \implies f(x) \leqslant f(0)\,(\forall\, x > 0)\,.$$

令 $x = 1$, 引理即得证.

由引理, 有

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_{i-1} + a_i + 1}{a_i + a_{i+1} + 1} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{a_{i-1} + a_i}{a_i + a_{i+1}}.$$

欲证原不等式成立, 只须证

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_{i-1} + a_i}{a_i + a_{i+1}} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{a_{i-1}}{a_i}. \tag{2}$$

记 $d_i = \dfrac{a_{i-1}}{a_i}$, 则

$$(2) \iff \sum_{i=1}^{n} d_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{d_i + 1}{1 + \dfrac{1}{d_{i+1}}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d_{i+1}(d_i + 1)}{d_{i+1} + 1}. \tag{3}$$

设 $\{d_i\}$ 的增序为

$$e_1 \leqslant e_2 \leqslant \cdots \leqslant e_n$$

$$\implies \frac{e_1}{e_1 + 1} \leqslant \frac{e_2}{e_2 + 1} \leqslant \cdots \leqslant \frac{e_n}{e_n + 1},$$

则

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \frac{d_{i+1}(d_i + 1)}{d_{i+1} + 1} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{e_{i+1}(e_i + 1)}{e_{i+1} + 1} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{e_{i+1}}{e_{i+1} + 1} \cdot (e_i + 1) \end{aligned}$$

是乱序和,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{e_i}{e_i + 1} \cdot (e_i + 1)$$

是顺序和. 由排序不等式, 有

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \frac{e_{i+1}}{e_{i+1} + 1} \cdot (e_i + 1) &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{e_i}{e_i + 1} \cdot (e_i + 1) \\ &= \sum_{i=1}^{n} e_i = \sum_{i=1}^{n} d_i. \end{aligned}$$

故 (3) 式得证. 从而原不等式成立. □

题 二

如图 1, $\triangle ABC$ 为给定的锐角三角形, 其内切圆 ω 分别与边 AB, AC 切于点 K, L. 高 AH 分别与 $\angle ABC$, $\angle ACB$ 的平分线交于点 P, Q. 设 ω_1, ω_2 分别为 $\triangle KPB$, $\triangle LQC$ 的外接圆, AH 的中点在 ω_1, ω_2 外. 求证: 从 AH 的中点引向 ω_1 和 ω_2 的切线长相等.

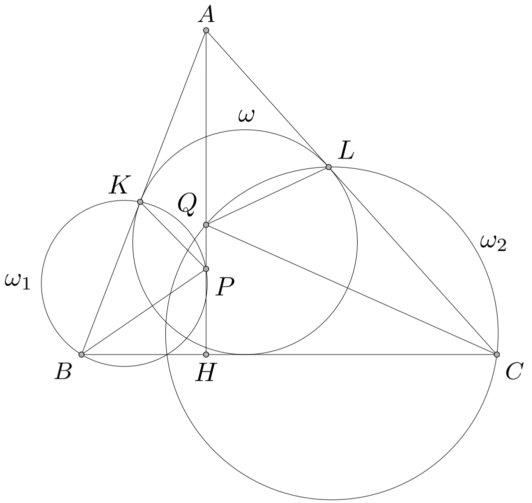

图 1

解析

证法 1: 如图 2.

设 $\triangle ABC$ 的内心为 I, 内切圆 ω 与 BC 的切点为 D, ω_1 与 BC 的另一交点 (异于 B) 为 E.

由 P 在 $\angle ABC$ 的平分线上, 知 $PK = PE$.

又 K 与 D 为切点, 故 $\triangle KPB \cong DPB$. 所以 $PK = PD$. 从而 $PD = PE$.

而 $AH \perp BC$, 故 H 为 DE 的中点.

同理, ω_2 与 BC 的另一交点 (异于 C) 为 E', 可证得 $QD = QE'$, H 为 DE' 的中点. 故 $E = E'$.

故点 E 是两圆 ω_1, ω_2 的交点.

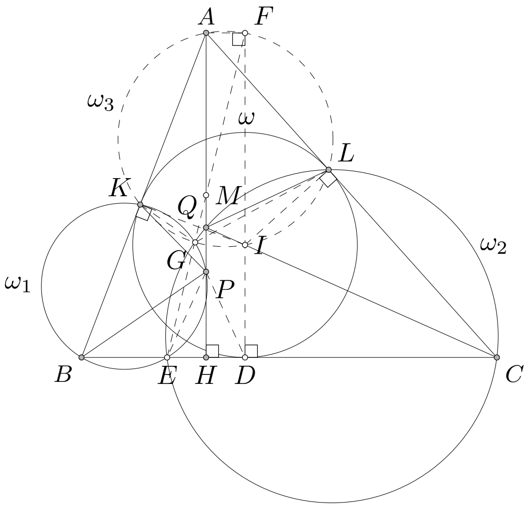

图 2

过 A 作 $AF \perp DI$ 于点 F. 连 EF 交 AH 于点 M, 则 M 为 AH 的中点.

易知 $AKILF$ 五点共圆 ω_3, 设 EF 与 ω_3 的另一交点 (异于 F) 为 G.

则 $\angle CEG = \angle CEF = \angle AFE = \angle AFG = \angle BKG$. 故 $BKGE$ 共圆.

同理可证 $CLGE$ 共圆. 所以 G 也是两圆 ω_1, ω_2 的交点. 从而 EG 是两圆 ω_1, ω_2 的根轴.

而 M 在 EG 上, 故命题得证. $\square$

证法 2: 如图 3.

设 AH 的中点为 M, D 关于 H 的对称点为 D'.

$\triangle ABC$ 的内心 I 在 $\angle ABC$ 的平分线 BP 上.

由 D' 与 D 关于 PH 对称, 知 $\angle D'PH = \angle DPH$, 而 $AH \parallel ID$, 故 $\angle DPH = \angle IDP$. 由 D 与 K 关于 BI 对称, 知 $\angle IDP = \angle IKP$. 所以 $\angle BKP + \angle BD'P = \pi$, 有 $BKPD'$ 共圆. 同理 $CLQD'$ 共圆. 即 D' 为圆 ω_1 和 ω_2 的交点.

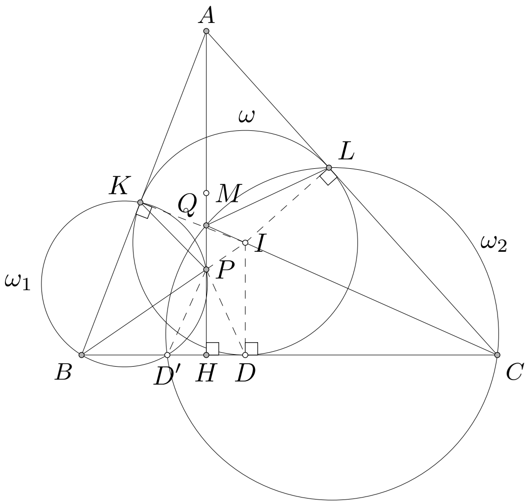

图 3

引入下面的符号:

设圆 ω_i 的圆心为 O_i, 半径为 r_i, 其中 $i = 1, 2$.

记点 X 对圆 ω_i 的幂为 $\mathbb{P}(X, \omega_i) = O_iX^2 - r_i^2$. 记

$$f(X) = \mathbb{P}(X, \omega_1) - \mathbb{P}(X, \omega_2).$$

由线性幂差引理, 得 $f(M) = \dfrac{f(A) + f(H)}{2}$.

而由圆幂定理, 有

$$\begin{aligned}
f(A) &= AK \cdot AB - AL \cdot AC \\
&= \frac{(b+c-a)(c-b)}{2}, \\
f(H) &= HD' \cdot HB + HD' \cdot HC \\
&= HD \cdot BC = (CH - CD) \cdot BC \\
&= BC \cdot AC \cdot \cos C - BC \cdot CD \\
&= \frac{a^2+b^2-c^2}{2} - \frac{a(a+b-c)}{2},
\end{aligned}$$

故 $f(M) = 0$. 因此点 M 对两圆 ω_1 和 ω_2 等幂. 即由 M 引向 ω_1 和 ω_2 的切线长相等. □