



高模妙题

南通市 2023 届高三第三次调研测试第 16 题

导言

微信公众号“奇趣数学苑”2023-05-04 分享了南通三模最妙一题——南通市 2023 届高三第三次调研测试第 16 题.

问题

如图 1, 在 $\triangle ABC$ 所在平面内, 分别以 AB, BC 为边向外作正方形 $ABEF$ 和正方形 $BCHG$. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 面积为 S . 已知 $S = \frac{3}{4}$, 且 $a \sin A + c \sin C = 4a \sin C \sin B$, 则 $FH =$ _____.

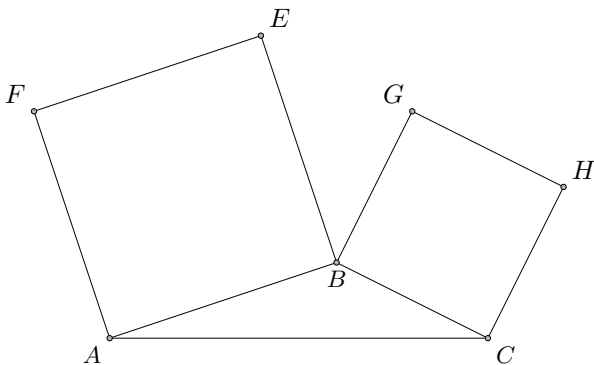


图 1

问题不繁, 先想一想, 怎么做?



解析

解: 如图 2, 连 FH, BF, BH .

由 $a \sin A + c \sin C = 4a \sin C \sin B$ 结合正弦定理, 得

$$a^2 + c^2 = 4ac \sin B.$$

在 $\triangle BHF$ 中, 由余弦定理, 得

$$\begin{aligned} FH^2 &= BH^2 + BF^2 - 2BH \cdot BF \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2} - B\right) \\ &= 2a^2 + 2c^2 + 4ac \sin B \\ &= 8ac \sin B + 4ac \sin B \\ &= 12ac \sin B = 24S = 18. \end{aligned}$$

所以 $FH = 3\sqrt{2}$. □

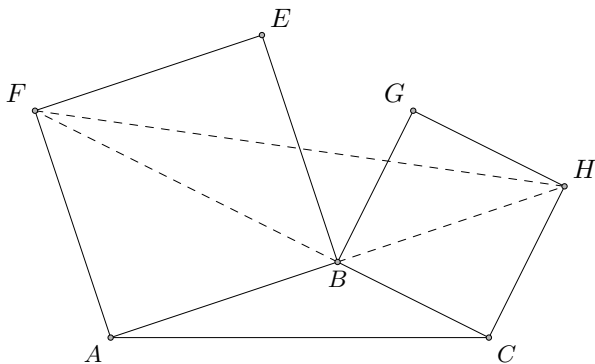


图 2