中国数学奥林匹克预赛北京赛区预赛

2023

费振鹏

错误难免，不吝指正.

一试

2023 年 5 月 21 日 $8:00-9:20$

前 8 题每题 8 分, 第 9 题 16 分, 第 10, 11 题每题 20 分

题 1.1 (2023 北京预赛一试, 第 11-1 题)

如图 1, $\angle ACB=90^\circ$, $AC=BC$, $AD\perp CE$, $BE\perp CE$, 垂足分别是 D, E. 已知 $AD=8$, $BE=3$, 则 $DE=$ ________.

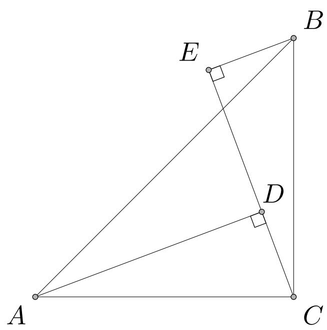

图 1

答案

5.

解析

解: 易知 $\triangle ACD\cong CBE$. 故 $CE=AD=8$, $CD=BE=3$. 从而 $DE=CE-CD=5$. □

题 1.2 (2023 北京预赛一试, 第 11-2 题)

S 是集合 $\{1,2,\cdots,2023\}$ 的子集, 满足任意两个元素的平方和不是 9 的倍数, 则 $|S|$ 的最大值是 ________(这里 $|S|$ 表示 S 的元素个数).

答案

1350.

解析

解: 整数 x 及其平方 x^2 模 9 的余数情况如下表:

$x \pmod 9$	0	±1	±2	±3	±4
$x^2 \pmod 9$	0	1	4	0	7

由此可知, $\left\lfloor\dfrac{2023}{3}\right\rfloor=674$ 个 3 的倍数只能任选 1 个, 其它所有数均可选入.

故 $|S|_{\max}=2023-674+1=1350$. □

题 1.3 (2023 北京预赛一试, 第 11-3 题)

已知函数 $f(x)=\sin\omega x+\sin 2x$, 其中 $\omega\in\mathbb{N}_+$, $\omega\leqslant 2023$. 若 $f(x)<2$ 恒成立, 则满足题设的常数 ω 的个数为 ________.

答案

1770.

解析

解: 只要考虑 $\sin 2x=1\iff x=\left(k+\dfrac{1}{4}\right)\pi$ 时, $\sin\omega x=\sin\dfrac{\omega(4k+1)\pi}{4}\neq 1$.

只须 $\omega(4k+1)\not\equiv 2\pmod 8\iff\omega\not\equiv 2\pmod 8$.

而在 $1,2,\cdots,2023$ 中模 8 余 2 的数有 253 个, 故所求数目为 $2023-253=1770$. □

题 1.4 (2023 北京预赛一试, 第 11-4 题)

已知集合 $A=\{1,2,3\}$, 映射 $f:A\to A$, 且满足对任意 $x\in A$, 有 $f(f(x))\geqslant x$, 则这样的 f 有 ________ 个.

答案

13.

解析

解: 列树状图分析:

情形一: $f(1)=1\implies\begin{cases}f(2)=2\implies f(3)=3,\\ f(2)=3\implies f(3)=2\text{或}3;\end{cases}$

情形二: $f(1)=2\implies\begin{cases}f(2)=1\implies f(3)=3,\\ f(2)=2\implies f(3)=3,\\ f(2)=3\implies f(3)=2\text{或}3;\end{cases}$

情形三: $f(1)=3\implies\begin{cases}f(2)=1\implies f(3)=1\text{或}3,\\ f(2)=2\implies f(3)=1\text{或}3,\\ f(2)=3\implies f(3)=2\text{或}3.\end{cases}$

这样的 f 一共有 13 个. □

题 1.5 (2023 北京预赛一试, 第 11-5 题)

已知向量 $|\vec{a}|=1$, $\left|\vec{b}\right|=2$, 且 $\vec{a},\vec{b}$ 夹角为 120°. 若 $\vec{a}+t\vec{b}$ 与 $t\vec{a}+\vec{b}$ 的夹角为锐角, 则 t 的取值范围是 ________.

答案

$\left(\dfrac{5-\sqrt{21}}{2},1\right)\cup\left(1,\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}\right)$.

解析

解: 由题意, 得 $(\vec{a}+t\vec{b})(t\vec{a}+\vec{b})>0$ 且 $t\neq 1$. 即 $t-1-t^2+4t>0\,(t\neq 1)$.

解得 $\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}<t<1$ 或 $1<t<\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}$. □

题 1.6 (2023 北京预赛一试, 第 11-6 题)

设实数 x, y 满足 $\begin{cases} x^3 - 3x^2 + 2026x = 2023, \\ y^3 + 6y^2 + 2035y = -4053, \end{cases}$ 则 $x + y =$ ________.

答案

-1.

解析

解: 原方程组变形为

$$\begin{cases} (1-x)^3 + 2023(1-x) = 1, \\ (y+2)^3 + 2023(y+2) = 1. \end{cases}$$

由于函数 $f(t) = t^3 + 2023t$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调, 故 $y + 2 = 1 - x$. 即 $x + y = -1$. □

题 1.7 (2023 北京预赛一试, 第 11-7 题)

已知在 $\triangle ABC$ 中, $a = 2b$, $\cos B = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, 则 $\sin\dfrac{A-B}{2} + \sin\dfrac{C}{2} =$ ________.

答案

$\dfrac{\sqrt{10}}{3}$.

解析

解: 我们记

$$\sin\frac{A}{2} := m > 0, \quad \cos\frac{A}{2} := n > 0, \quad \sin\frac{B}{2} := x > 0, \quad \cos\frac{B}{2} := y > 0,$$

则有 $m^2 + n^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 1$. 所以

$$\sin\frac{A-B}{2} + \sin\frac{C}{2} = \sin\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2} = my - nx + ny - mx = (n+m)(y-x).$$

由正弦定理, 得 $2 = \dfrac{a}{b} = \dfrac{\sin A}{\sin B} = \dfrac{2mn}{2xy} \implies mn = 2xy$.

由 $\cos B = 1 - 2x^2 = \dfrac{2\sqrt{2}}{3} \implies x^2 = \dfrac{3-2\sqrt{2}}{6}\,(x>0) \implies x = \dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{6}}, y = \dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{6}}$.

所以 $(n+m)^2 = m^2 + n^2 + 2mn = 1 + 4xy = \dfrac{5}{3}\,(n>0, m>0) \implies n + m = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$.

综上, 原式 $= \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{2}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{10}}{3}$. □

题 1.8 (2023 北京预赛一试, 第 11-8 题)

使得 $n^2 + 2023n$ 为平方数的正整数 n 的最小值是 ________.

答案

425.

解析

解: 设 $n^2 + 2023n = m^2$, 其中 $m \in \mathbb{Z}_{>0}$, 则

$$(2n + 2m + 2023)(2n - 2m + 2023) = 7^2 \times 17^4. \tag{1}$$

注意到 $7^2\times 17^4$ 的正约数从小到大依次为

$$1,\ 7,\ 17,\ 7^2,\ 7\times 17,\ 17^2,\ 7^2\times 17,\ 7\times 17^2,$$
$$17^3,\ 7^2\times 17^2,\ 7\times 17^3,\ 17^4,\ 7^2\times 17^3,\ 7\times 17^4,\ 7^2\times 17^4.$$

当 n 取到最小时, (1) 式左边两因式之和 $4n+2023\times 2$ 取到最小, 又 $2n+2m+2023>2023=7\times 17^2$, 故 $4n+2023\times 2=17^3+7^2\times 17$. 解得 $n=425$. □

题 1.9 (2023 北京预赛一试, 第 11-9 题)

已知 a,b 为正整数, $a<b$, 且 a,b 互质. 若关于 x,y 的不等式 $ax+by\leqslant ab$ 有且仅有 2023 组正整数解, 则 $(a,b)=$ ________________ (求出满足题意的所有可能数组).

答案

$(a,b)=(2,4047),(3,2024),(8,579)$, 或 $(18,239)$.

解析

解: 由 $ax+by\leqslant ab\implies y\leqslant -\dfrac{a}{b}x+a$, 根据题意, 得

$$\sum_{x=1}^{b-1}\left(\left\lfloor a-\frac{a}{b}x\right\rfloor\right)=2023.$$
$$\frac{(a+1)(b+1)-2(a+b)}{2}=2023.$$
$$(a-1)(b-1)=2\times 7\times 17^2.$$

$a-1$	1	2	7	14	17	34
$b-1$	4046	2023	578	289	238	119
(a,b)	$(2,4047)$	$(3,2024)$	$(8,579)$	$(15,290)$	$(18,239)$	$(35,120)$
a,b 是否互质	是	是	是	否	是	否

综上, 所求 $(a,b)=(2,4047),(3,2024),(8,579)$, 或 $(18,239)$. □

题 1.10 (2023 北京预赛一试, 第 11-10 题)

已知 x 是一个锐角, 那么 $\dfrac{8}{\sin x}+\dfrac{1}{\cos x}$ 的最小值是 ________.

答案

$5\sqrt{5}$.

解析

解法 1: 由柯西不等式, 得

$$\left(\frac{8}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}\right)(2\sin x+\cos x)\geqslant 25.$$
$$\frac{8}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}\geqslant\frac{25}{2\sin x+\cos x}=\frac{25}{\sqrt{5}\sin(x+\theta)}\geqslant 5\sqrt{5}.$$

当 $\sin x=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos x=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ 等号成立. 故所求最小值为 $5\sqrt{5}$. □

解法 2: 设 $m=\dfrac{8}{\sin x}$, $n=\dfrac{1}{\cos x}$, 则 $\sin x=\dfrac{8}{m}$, $\cos x=\dfrac{1}{n}$. 故 $\dfrac{64}{m^2}+\dfrac{1}{n^2}=1$.

由权方和不等式, 得

$$1=\frac{64}{m^2}+\frac{1}{n^2}=\frac{4^3}{m^2}+\frac{1^3}{n^2}\geqslant\frac{(4+1)^3}{(m+n)^2}.$$

故 $m+n\geqslant 5\sqrt{5}$. 后略. □

题 1.11 (2023 北京预赛一试, 第 11-11 题)

现有 11 位同学报名博物馆的志愿讲解活动, 活动从上午 9 点开始到下午 5 点结束, 每小时安排一场公益小讲堂, 每场需要 1 位同学为参观的游客提供讲解服务. 为避免同学们劳累, 馆方在排班时不会让同一人连续讲解 2 场, 并且第一场与最后一场需要两位不同的同学负责. 则馆方共有 ________ 种排班方式.

答案

100000010.

解析

解: 设讲解 n 小时, 馆方有 $a_n\,(n=1,2,\cdots,8)$ 种排班方式.

则 $a_1=11$, $a_2=11\times10=110$, $a_3=11\times10\times9=990$. 当 $n\geqslant4$ 时, $a_n=9a_{n-1}+10a_{n-2}$.

记 $b_1=110$, $b_2=990$, $b_n=9b_{n-1}+10b_{n-2}\,(n\geqslant3)$. 由特征根法, 得 $b_n=10^{n+1}-10\cdot(-1)^n$.

故 $a_8=b_7=10^8+10=100000010$. □

二试

2023 年 5 月 21 日 $9:40-12:30$

题 一、(40 分)(2023 北京预赛二试, 第一题)

已知实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n>0$, 求证:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{i-1}}{a_i}\geqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{i-1}+a_i+1}{a_i+a_{i+1}+1},$$

其中 $a_0=a_n$, $a_{n+1}=a_1$.

解析

证: 首先证明下面的引理.

引理: 若实数 $b_1,b_2,\cdots,b_n>0$, 则

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{b_{i-1}}{b_i}\geqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{b_{i-1}+1}{b_i+1}.\tag{1}$$

证明: 注意到 (1) $\iff\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{b_{i-1}-b_i}{b_i}\geqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{b_{i-1}-b_i}{b_i+1}$.

记 $f(x)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{b_{i-1}-b_i}{x+b_i}\,(x>0)$, 则

$$f'(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i-b_{i-1}}{(x+b_i)^2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{(x+b_i)^2}-\sum_{i=1}^{n}\frac{b_{i-1}}{(x+b_i)^2}.$$

设 $\{b_n\}$ 的增序为 $c_1\leqslant c_2\leqslant\cdots\leqslant c_n$, 则 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{(x+b_i)^2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{(x+c_i)^2}$ 是逆序和, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{b_{i-1}}{(x+b_i)^2}$ 是乱序和.

故由排序不等式, 有 $f'(x)\leqslant0\implies f(x)\leqslant f(0)\,(\forall x>0)$. 令 $x=1$, 引理即得证.

由引理, 有 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{i-1}+a_i+1}{a_i+a_{i+1}+1}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{i-1}+a_i}{a_i+a_{i+1}}$. 欲证原不等式成立, 只须证

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{i-1}+a_i}{a_i+a_{i+1}}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{i-1}}{a_i}.\tag{2}$$

记 $d_i=\dfrac{a_{i-1}}{a_i}$, 则

$$(2)\iff\sum_{i=1}^{n}d_i\geqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{d_i+1}{1+\dfrac{1}{d_{i+1}}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{d_{i+1}(d_i+1)}{d_{i+1}+1}.\tag{3}$$

设 $\{d_i\}$ 的增序为 $e_1\leqslant e_2\leqslant\cdots\leqslant e_n\implies\dfrac{e_1}{e_1+1}\leqslant\dfrac{e_2}{e_2+1}\leqslant\cdots\leqslant\dfrac{e_n}{e_n+1}$.

则 $\sum_{i=1}^{n} \frac{d_{i+1}(d_i+1)}{d_{i+1}+1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{e_{i+1}(e_i+1)}{e_{i+1}+1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{e_{i+1}}{e_{i+1}+1} \cdot (e_i+1)$ 是乱序和, $\sum_{i=1}^{n} \frac{e_i}{e_i+1} \cdot (e_i+1)$ 是顺序和.
由排序不等式, 有

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{e_{i+1}}{e_{i+1}+1} \cdot (e_i+1) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{e_i}{e_i+1} \cdot (e_i+1) = \sum_{i=1}^{n} e_i = \sum_{i=1}^{n} d_i.$$

故 (3) 式得证. 从而原不等式成立. □

题 二、(40 分)(2023 北京预赛二试, 第二题)

如图 2, $\triangle ABC$ 为给定的锐角三角形, 其内切圆 ω 分别与边 AB, AC 切于点 K, L. 高 AH 分别与 $\angle ABC$, $\angle ACB$ 的平分线交于点 P, Q. 设 ω_1, ω_2 分别为 $\triangle KPB$, $\triangle LQC$ 的外接圆, AH 的中点在 ω_1, ω_2 外. 求证: 从 AH 的中点引向 ω_1 和 ω_2 的切线长相等.

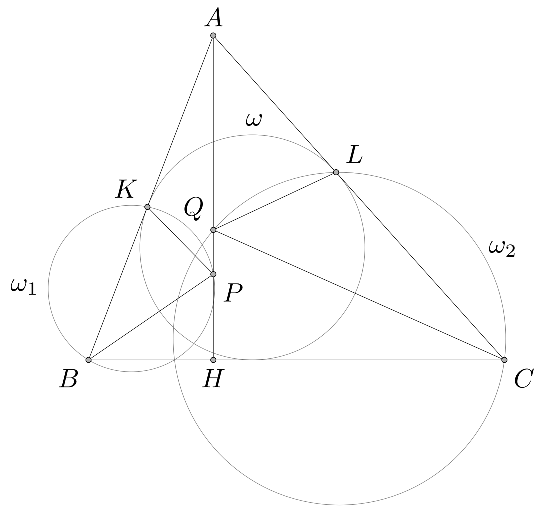

图 2

解析

证法 1: 如图 3.

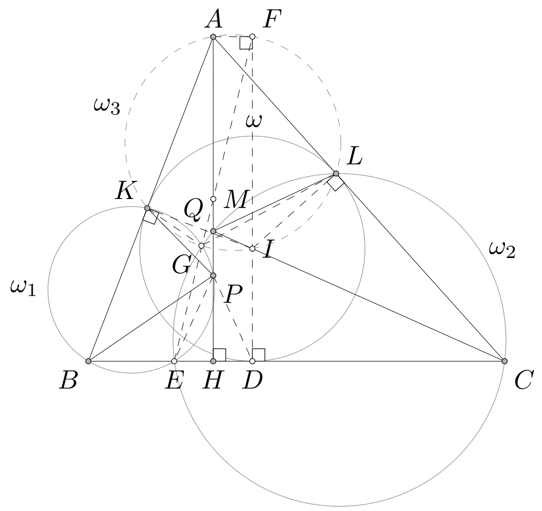

图 3

设 $\triangle ABC$ 的内心为 I, 内切圆 ω 与 BC 的切点为 D, ω_1 与 BC 的另一交点 (异于 B) 为 E.
由 P 在 $\angle ABC$ 的平分线上, 知 $PK = PE$.
又 K 与 D 为切点, 故 $\triangle KPB \cong DPB$. 所以 $PK = PD$. 从而 $PD = PE$.
而 $AH \perp BC$, 故 H 为 DE 的中点.

同理, ω_2 与 BC 的另一交点 (异于 C) 为 E', 可证得 $QD=QE'$, H 为 DE' 的中点. 故 $E=E'$.

故点 E 是两圆 ω_1,ω_2 的交点.

过 A 作 $AF\perp DI$ 于点 F. 连 EF 交 AH 于点 M, 则 M 为 AH 的中点.

易知 $AKILF$ 五点共圆 ω_3, 设 EF 与 ω_3 的另一交点 (异于 F) 为 G.

则 $\angle CEG=\angle CEF=\angle AFE=\angle AFG=\angle BKG$. 故 $BKGE$ 共圆.

同理可证 $CLGE$ 共圆. 所以 G 也是两圆 ω_1,ω_2 的交点. 从而 EG 是两圆 ω_1,ω_2 的根轴.

而 M 在 EG 上, 故命题得证. □

证法 2: 如图 4.

设 AH 的中点为 M, D 关于 H 的对称点为 D'. $\triangle ABC$ 的内心 I 在 $\angle ABC$ 的平分线 BP 上.

由 $\angle D'PH \xlongequal{D'\text{与}D\text{关于}PH\text{对称}} \angle DPH=\angle IDP \xlongequal{D\text{与}K\text{关于}BI\text{对称}} \angle IKP \implies \angle BKP+\angle BD'P=\pi$, 知 $BKPD'$ 共圆. 同理 $CLQD'$ 共圆. 即 D' 为圆 ω_1 和 ω_2 的交点.

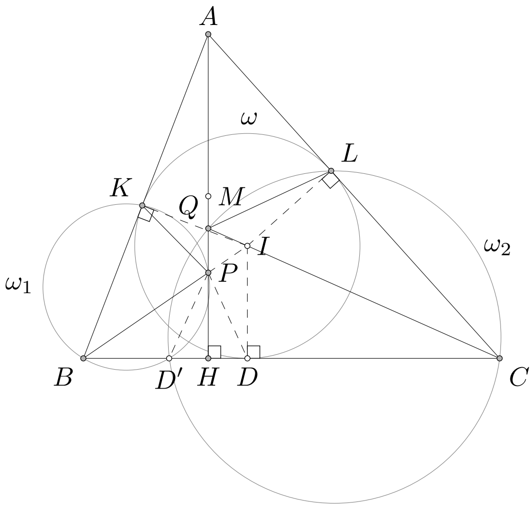

图 4

引入下面的符号:

设圆 ω_i 的圆心为 O_i, 半径为 r_i, 其中 $i=1,2$.

记点 X 对圆 ω_i 的幂为 $\mathbb{P}(X,\omega_i)=O_iX^2-r_i^2$. 记 $f(X)=\mathbb{P}(X,\omega_1)-\mathbb{P}(X,\omega_2)$.

由线性幂差引理, 得 $f(M)=\dfrac{f(A)+f(H)}{2}$.

而由圆幂定理, 有

$$\begin{aligned}
f(A)&=AK\cdot AB-AL\cdot AC=\frac{(b+c-a)(c-b)}{2},\\
f(H)&=HD'\cdot HB+HD'\cdot HC=HD\cdot BC\\
&=(CH-CD)\cdot BC=BC\cdot AC\cdot\cos C-BC\cdot CD\\
&=\frac{a^2+b^2-c^2}{2}-\frac{a(a+b-c)}{2},
\end{aligned}$$

故 $f(M)=0$. 因此点 M 对两圆 ω_1 和 ω_2 等幂. 即由 M 引向 ω_1 和 ω_2 的切线长相等. □

题 三、(50 分)(2023 北京预赛二试, 第三题)

某校举办数学文化节, 据统计当天共有 980 多 (不少于 980, 小于 990) 名同学进校参观, 每位同学进校参观一段时间后离开 (之后不会再进来). 若无论这些同学以怎样的时间安排参观, 我们都能找到 k 位同学, 使得要么这 k 位同学在某个时间都在校园内参观, 要么任何时间他们中都没有两个人同时在校园内参观. 求 k 的最大值.

答案

32.

解析

解: 设学生数为 n, 满足 $980 \leqslant n \leqslant 989$.

一方面, 若前 31 组, 每组 31 人, 共 961 人; 第 32 组, 至少 19 人, 至多 28 人. 每组同学同时进、出校园, 且每组之间没有重叠时间. 这种情况, 最多有 31 位同学在某个时间都在校园内参观, 而最多可选出 32 位同学, 即从这 32 组中各选一人, 他们没有两个人同时在校园内参观 (由抽屉原理知不能再多). 这表明所求 $k_{\max} \leqslant 32$.

另一方面, 假设存在 $k_{\max} \leqslant 31$ 的情况. 我们将第一个出校园的同学 T_1, 及他出校园之前进校园的人称为第 1 组; 对剩下的人, 重复上面的分组方式, 得到相应的 T_2 与第 2 组, $\cdots$, T_t 与第 t 组. 此时, 所有 n 名同学全部分完组. 如此分组, 可知每组中的所有同学在某个时间都在校园内参观 (由假设知其中人数不超过 31), 且 $T_1, T_2, \cdots, T_t$ 中没有两个人同时在校园内参观 (由假设知 $t \leqslant 31$). 因此总人数不超过 $31t \leqslant 31^2 = 961 < n$. 矛盾. 即不存在 $k_{\max} \leqslant 31$ 的情况.

综上, $k_{\max} = 32$. □

题 四、(50 分)(2023 北京预赛二试, 第四题)

求所有不超过 100 的合数 k, 使得存在整数 n, 满足 $k \mid \left(3n^6 + 26n^4 + 33n^2 + 1\right)$.

答案

不超过 100 的合数 $k = 9, 21, 27, 39, 49, 57, 63, 81, 87, 91, 93$.

解析

解: 设 $f(n) = 3n^6 + 26n^4 + 33n^2 + 1$.

我们考虑 k 的质因子 p.

(1) 由 $f(n) \equiv n + 0 + n + 1 \equiv 1 \pmod 2$, 知 $p \neq 2$.

(2) 由 $f(1) = 63 = 3^2 \times 7$, 知 $p = 3, 7$.

(3) 由 $f(n) \equiv 3n^2 + n^4 + 3n^2 + 1 = \left(n^2 + 3\right)^2 - 8 \equiv 1 \text{或} 3 \pmod 5$, 知 $p \neq 5$.

(4) 由 $f(n) \equiv 3n^6 + 4n^4 + 1 \pmod{11}$, 及模 11 的平方剩余为 $0, 1, -2, 3, 4, 5 \pmod{11}$, 知 $p \neq 11$.

(5) 由 $f(2) = 741 = 3 \times 13 \times 19$, 知另有 $p = 13, 19$.

(6) 由 $f(n) \equiv 3n^6 + 9n^4 - n^2 + 1 \pmod{17}$, 及模 17 的平方剩余为 $0, \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8 \pmod{17}$, 知 $p \neq 17$.

(7) 由 $f(n) \equiv 3n^6 + 3n^4 + 10n^2 + 1 \pmod{23}$, 及模 23 的平方剩余为 $0, 1, 2, 3, 4, -5, 6, -7, 8, 9, -10, -11 \pmod{23}$, 知 $p \neq 23$.

(8) 由 $f(7) = 416991 = 3 \times 29 \times 4793$, 知另有 $p = 29$.

(9) 由 $f(12) = 9501841 = 31 \times 306511$, 知 $p = 31$.

所以, 合数 k 所含的质因子有 3, 7, 13, 19, 29, 31.

亨泽尔引理的推论: 同余方程 $f(x) \equiv 0 \pmod p$ 的一个解 a, 只要满足 $p \nmid f'(a)$, 则唯一提升为 $f(x) \equiv 0 \pmod{p^n}$ 的解.

由 $f'(n) = 18n^5 + 104n^3 + 66n$, 知 $3 \nmid f'(1)$. 故由亨泽尔引理的推论, 知有解 $k = 3^2, 3^3, 3^4 = 9, 27, 81$.

类似地, 有 $7 \nmid f'(1)$, 由亨泽尔引理的推论, 知有解 $k = 7^2 = 49$.

另由中国剩余定理, 知有解 $k = 3 \times 7, 3^2 \times 7, 3 \times 13, 7 \times 13, 3 \times 19, 3 \times 29, 3 \times 31 = 21, 63, 39, 91, 57, 87, 93$.

综上, 满足要求的不超过 100 的合数 $k = 9, 21, 27, 39, 49, 57, 63, 81, 87, 91, 93$. □