風學數

草博

高模佳题

2026 汕头一模第 19 题

微信公众号“奇趣数学苑”2026 年 3 月 5 日发表的好题分享系列《今年高考这么考十分有可能》, 文中的题为 2026 年汕头市普通高考第一次模拟考试数学试卷中解答题第 19 小题 (大轴题), 具体问题如下.

问题

设等差数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的公差 $d>0$, 首项 $a_1=1$. 已知从中能抽取 $k\,(k\geqslant 3)$ 个项并按原顺序排成公比为 q 的等比数列 $a_{m_1}, a_{m_2}, \cdots, a_{m_k}$, 其中 $m_1=1$, $2\leqslant m_2<m_3<\cdots<m_k\leqslant n$.

(1) 若从等差数列 1, 3, 5, $\cdots$, $2n-1$ 中能抽取 3 个项并按原顺序排成等比数列, 求 $2n-1$ 的最小值;

(2) 求证: $n\geqslant 2^{k-1}$;

(3) 请举出一个满足 $n=2^{k-1}$ 的例子.

参考解答在下页.

解析

解答: (1) 设所抽取的 3 项成等比数列, 且第 1 项为 1, 公比为 $q\,(q>1)$, 则这 3 项为 1, q, q^2.

由于奇数 $q>1$, 故取 $q=3$, 此时 $q^2=9$.

故 $2n-1\geqslant 9$. 相应的原等差数列为 1, 3, 5, 7, 9.

综上, $2n-1$ 的最小值为 9.

(2) 由 $d>0$ 知 $q>1$.

$a_{m_1}=a_1=1$, 设所抽取的等比数列为

$$1,q,q^2,\cdots,q^{k-1}.$$

由题意知, 存在正整数 a,b, 满足

$$q^2-q=da,\ q-1=db.$$

所以 $q=\dfrac{q^2-q}{q-1}=\dfrac{a}{b}\in\mathbb{Q}$.

$$a_{m_2}=q=1+(m_2-1)\,d$$

$$\Longrightarrow\ d=\frac{q-1}{m_2-1}:=\frac{q-1}{t}\,(t=m_2-1\in\mathbb{N}^*)\,.$$

$$a_{m_i}=q^{i-1}=1+(m_i-1)\,d$$

$$\Longrightarrow\ m_i-1=\frac{q^{i-1}-1}{d}=t\left(1+q+q^2+\cdots+q^{i-2}\right).$$

故正整数 $m_i-m_{i-1}=tq^{i-2}=\dfrac{ta^{i-2}}{b^{i-2}}\,(i=2,3,\cdots,k)$.

不妨设 a,b 互质, 则 $b^{k-2}\mid t$. 从而 $t\geqslant b^{k-2}$.

$$\begin{aligned} m_k&=1+t\left(1+q+q^2+\cdots+q^{k-2}\right)\\ &\geqslant 1+b^{k-2}\left(1+q+q^2+\cdots+q^{k-2}\right) \end{aligned}$$

当 $b=1$, 则整数 $q\geqslant 2$, 故

$$m_k\geqslant 1+1+2+2^2+\cdots+2^{k-2}=2^{k-1}.$$

当 $b\geqslant 2$ 时, 由 $q>1$, $k\geqslant 3$, 得

$$m_k>1+2^{k-2}\cdot(k-1)>2^{k-1}.$$

综上, $n\geqslant m_k\geqslant 2^{k-1}$.

(3) 等差数列为 1, 2, 3, $\cdots$, 2^{k-1} (公差 $d=1$, 项数 $n=2^{k-1}$), 从中抽取的等比数列为 1, 2, 2^2, $\cdots$, 2^{k-1} (公比 $q=2$, 项数为 k). 满足要求. □