中考数学

2023 广州中考数学第 25 题

贾振鹏

导言

2023 广州中考数学第 25 题, 虽中规中矩, 但也不失为一道好题.

题 25

如图 1, 在正方形 $ABCD$ 中, E 是边 AD 上一动点 (不与点 A, D 重合), 边 BC 关于 BE 对称的线段为 BF, 连接 AF.

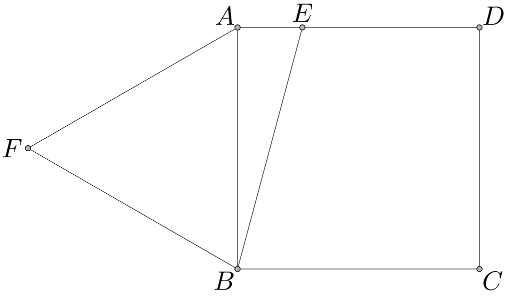

图 1

(1) 若 $\angle ABE = 15^\circ$, 求证: $\triangle ABF$ 是等边三角形;

(2) 延长 FA, 交射线 BE 于点 G.

① $\triangle BGF$ 能否为等腰三角形? 如果能, 求此时 $\angle ABE$ 的度数; 如果不能, 请说明理由;

② 若 $AB = \sqrt{3} + \sqrt{6}$, 求 $\triangle BGF$ 面积的最大值, 并求此时 AE 的长.

解析

解: (1) 略.

(2) 如图 2. 设 $\angle ABE=\alpha$.

由轴对称性, 知 $\angle GBF=\angle GBC=90^\circ-\alpha$.

故 $\angle ABF=90^\circ-2\alpha$.

而 $AB=BF$, 故 $\angle BAF=\angle AFB=45^\circ+\alpha$. 所以 $\angle BGC=\angle BGF=45^\circ$.

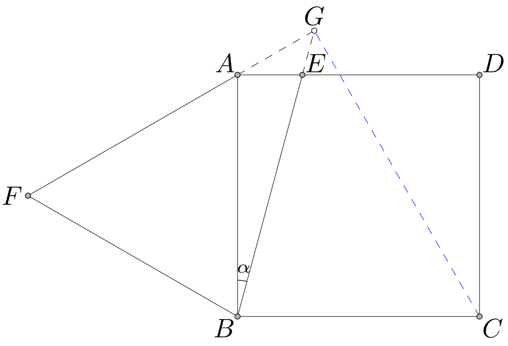

图 2

① 连 CG. 因为 $BG>BE>BA=BF$, 类似地 $FG=CG>BF$, 所以只能 $BG=FG$.

又 $BA=BF$, 故两等腰三角形 GFB, BFA 相似. 由其顶角相等, 得 $90^\circ-2\alpha=45^\circ$, 则 $\alpha=22.5^\circ$.

即当 $\triangle BGF$ 为等腰三角形时, $\angle ABE=22.5^\circ$.

② 如图 3. 作 $GH\perp BC$ 于 H.

由于 C, F 关于 BE 对称, 故 $\triangle BGF\cong\triangle BGC$. 所以只要求 $\triangle BGC$ 面积最大值.

而其底边 $BC=\sqrt{3}+\sqrt{6}$ 是定值, 所以只要使得高 GH 最大. 由 $\angle AGC=90^\circ$, 知点 G 的轨迹为正方形

$ABCD$ 外接圆上劣弧 $\overset{\frown}{AD}$(不含 A,D 两端点). 所以高

$$\begin{aligned} GH_{\max} &= G'H' = OG' + OH' \\ &= \frac{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)}{2}. \end{aligned}$$

其中 G' 为 $\overset{\frown}{AD}$ 的中点, 进而

$$\begin{aligned} S_{\triangle BGF_{\max}} &= \frac{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)^2}{4} \\ &= \frac{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(9+6\sqrt{2}\right)}{4} \\ &= \frac{21+15\sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

由于 G' 是 $\overset{\frown}{AD}$ 的中点, 故 BE' 平分 $\angle ABD = 45°$. 故 $\dfrac{AE'}{E'D} = \dfrac{AB}{BD} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. 因此

$$AE' = \frac{AD}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{3}\left(1+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{3}.$$

综上, $\triangle BGF$ 面积的最大值为 $\dfrac{21+15\sqrt{2}}{4}$, 此时, $AE = \sqrt{3}$. □

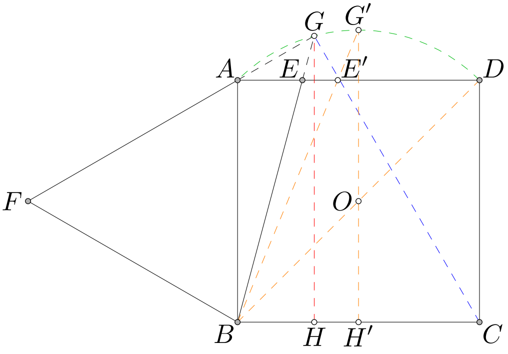

图 3