



2023 上海中考数学第 25 题

费振鹏

引言

2023 年上海中考数学试卷最后一题——第 25 题,也是那类原来可以利用余弦定理,直接列方程就可求解的问题.这也正是现行初中教材删去解斜三角形的正、余弦定理后,带来的麻烦.迫使初中师生只能通过作垂线转化为直角三角形来求解,有时显然十分零碎磨叽.

题 25

如图 1 所示,已知在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, O 在边 AB 上,点 F 为 OB 的中点,以 O 为圆心, OB 为半径的圆分别交 CB , CA 于点 D , E ,联结 EF 交 OD 于点 G .

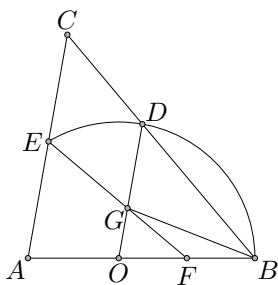


图 1

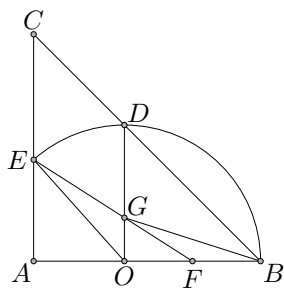


图 2

(1) 如果 $OG = DG$, 求证: 四边形 $CEGD$ 为平行四边形;

(2) 如图 2 所示, 联结 OE , 如果 $\angle BAC = 90^\circ$,



$\angle OFE = \angle DOE$, $AO = 4$, 求 OB 的长;

(3) 联结 BG , 如果 $\triangle OBG$ 是以 OB 为腰的等腰三角形, 且 $AO = OF$, 求 $\frac{OG}{OD}$ 的值.

解析

证: (1) 略. □

解: (2) 如图 3.

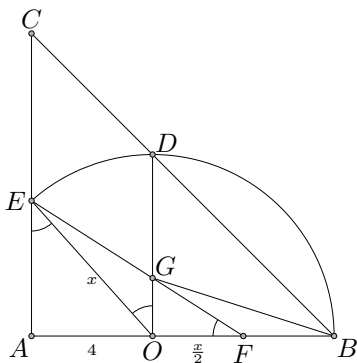


图 3

$$AB = AC \implies \angle C = \angle ABC.$$

$$OB = OD \implies \angle ABC = \angle ODB.$$

$$\text{所以 } \angle C = \angle ODB \implies OD \parallel AC.$$

$$\text{所以 } \angle OFE = \angle DOE = \angle AEO.$$

$$\text{所以 } \triangle AOE \sim \triangle AEF \implies AE^2 = AO \cdot AF.$$

$$\text{设 } OB = x, \text{ 则 } OE = x, OF = \frac{x}{2}.$$

由勾股定理, 得 $AE^2 = x^2 - 16$. 所以

$$x^2 - 16 = 4 \left(4 + \frac{x}{2} \right).$$

$$\text{解得 } x = 1 + \sqrt{33} \quad (1 - \sqrt{33} < 0 \text{ 舍去}).$$

$$\text{即 } OB = 1 + \sqrt{33}. \quad \square$$



解: (3) 如图 4.

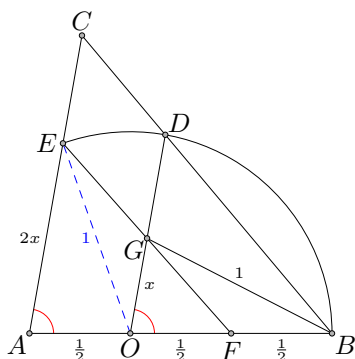


图 4

不妨设 $OG = x$, $OD = 1$, 则 $BG = OB = OD = 1$,
且 $AO = OF = FB = \frac{1}{2}$. 连 OE , 则 $OE = 1$.

类似 (2) 可证得 $OD \parallel AC$.

故 $AE = 2OG = 2x$, $\angle BOG = \angle OAE$.

设 $\cos \angle BOG = \cos \angle OAE = y$, 则分别在 $\triangle BOG$,
 $\triangle AOE$ 中, 由余弦定理, 得

$$x^2 + 1 - 2xy = 1 \xrightarrow{x > 0} x = 2y, \quad (1)$$

$$4x^2 + \frac{1}{4} - 2xy = 1. \quad (2)$$

将 (1) 代入 (2), 注意到 $x > 0$, 解得 $x = \frac{1}{2}$.

综上, $\frac{OG}{OD} = \frac{1}{2}$. □