



2023 深圳中考数学第 15 题

费培鹏

导言

今天中午，在视频号“羽生先生”上看到了上午刚考完的深圳中考数学试卷中的第 15 题。回忆版试题如下。

题 15

如图 1，等腰 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $\tan \angle ABC = \frac{3}{4}$ ，将 $\triangle ABD$ 翻折到 $\triangle AED$ ， DE 交 AC 于 F ，且 $\frac{AF}{CF} = 3$ ，求 $\triangle AEF$ 和 $\triangle ADF$ 的面积比。

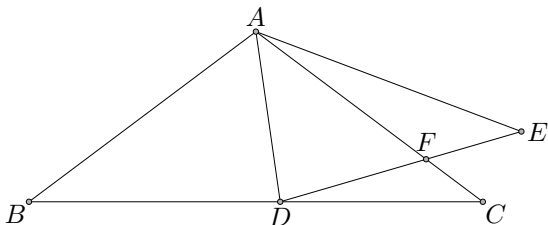


图 1

解析

解：如图 2。

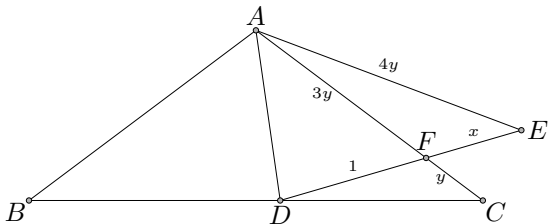


图 2



不妨设 $EF = x$, $DF = 1$.

由 $\frac{AF}{CF} = 3$ 可设 $CF = y$, $AF = 3y$. 故 $AE = AB = AC = 4y$.

由轴对称性, 知 $\angle E = \angle B = \angle C$. 故 A, E, C, D 共圆. 所以由相交弦定理, 得

$$x = 3y^2. \quad (1)$$

由 $\tan \angle E = \tan B = \frac{3}{4}$, 知 $\cos \angle E = \frac{4}{5}$.

在 $\triangle AEF$ 中, 由余弦定理, 得

$$x^2 + 16y^2 - 2x \cdot 4y \cdot \frac{4}{5} = 9y^2.$$

即 $5x^2 - 32xy + 35y^2 = 0 \iff (5x - 7y)(x - 5y) = 0$.

$$5x = 7y, \text{ 或 } x = 5y. \quad (2)$$

联立 (1), (2), 消去 y , 舍去 $x = 0$, 解得 $x = \frac{49}{75}$ 或 $\frac{25}{3}$.

综上, $\triangle AEF$ 和 $\triangle ADF$ 的面积比为 $\frac{49}{75}$ 或 $\frac{25}{3}$. \square

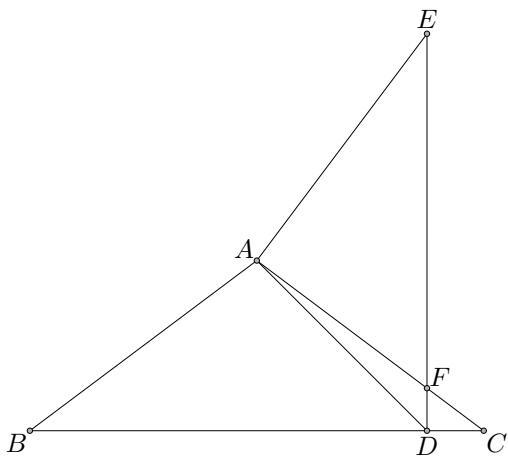


图 3