2023 深圳中考数学第 22 (3) 题

贯振鹏

题 22 (3)

如图 1, 在 $\square ABCD$ 中, $AB=6$, $AD=5$, $\angle A=60^\circ$. 点 E 在边 CD 上, 且 $CE=2$, 点 F 为边 BC 上一点, $EG\perp EF$ 交平行四边形的边于点 G. 当 $EF\cdot EG=7\sqrt{3}$ 时, 请直接写出 AG 的长.

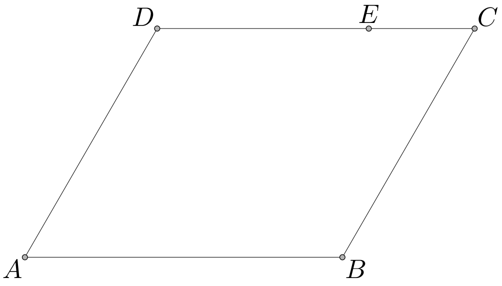

图 1

解析

解: 分以下两种情形讨论:

情形一: 点 G 在边 AD 上, 如图 2.

延长 GE 交 BC 的延长线于点 H, 点 E 在 FH 上的射影为 K. 设 $CH=x$, $CF=y$, 则 $EG=2EH$, $DG=2x$, $CK=1$, $EK=\sqrt{3}$, $FK=y-1$.

由射影定理, 有 $EK^2=FK\cdot HK$, 即

$$(x+1)(y-1)=3. \tag{1}$$

由面积比 $\dfrac{S_{\triangle EFH}}{S_{\triangle EFG}}=\dfrac{EH}{EG}=\dfrac{EC}{DE}=\dfrac{1}{2}$, 即

$$\frac{(x+y)\sqrt{3}}{7\sqrt{3}}=\frac{1}{2} \iff 2x+2y=7. \tag{2}$$

联立 (1), (2), 解得 $(x,y)=\left(1,\dfrac{5}{2}\right),\left(\dfrac{1}{2},3\right)$.

相应地, $AG=5-2x=3,4$.

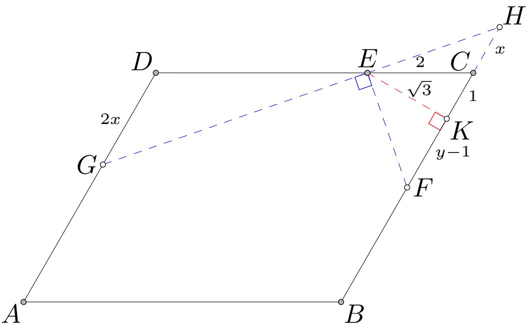

图 2

情形二: 点 G 在边 AB 上, 如图 3.

延长 GE 交 BC 的延长线于点 H, 点 E 在 FH 上的射影为 K. 设 $CH=x$, $CF=y$.

类似情形一, 由射影定理, 得

$$(x+1)(y-1)=3. \tag{3}$$

由面积比 $\dfrac{S_{\triangle EFH}}{S_{\triangle EFG}}=\dfrac{EH}{EG}=\dfrac{CH}{BC}=\dfrac{x}{5}$, 即

$$\frac{(x+y)\sqrt{3}}{7\sqrt{3}}=\frac{x}{5} \iff 2x=5y. \tag{4}$$

联立 (3), (4), 解得 $(x,y)=\left(4,\dfrac{8}{5}\right)$ (另一解为负数, 舍去). 所以 $BG=\dfrac{9}{2}$. 因此 $AG=\dfrac{3}{2}$.

综上, 当 G 在边 AD 上时, $AG=3$ 或 4; 当 G 在边 AB 上时, $AG=\dfrac{3}{2}$. $\square$

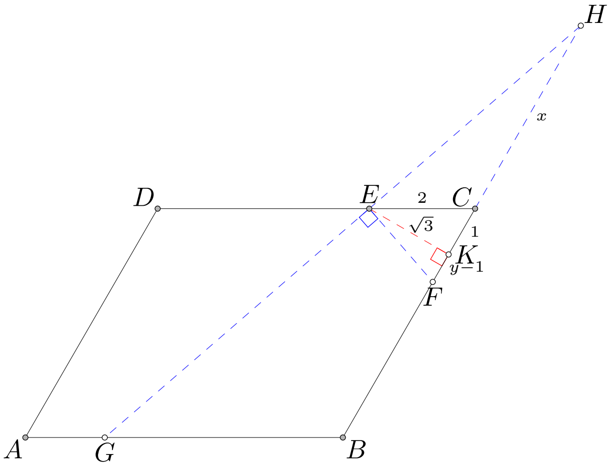

图 3

后记

对于较复杂的几何计算题，我有个习惯，喜欢列方程 (组)，解方程一气呵成. 有同学习惯分步列式计算，这对按步得分的评分标准来说，确有利于使得分最大化.

另外，本题中的两种情况，列方程均通过射影定理与三角形面积比完成的，处理方式完全一致，从而达到思考时间的成本最小化目的.