风学数

草博

高考数学

2026 全国高考数学一卷第 11 题

夫　子

题目（2026 全国高考数学一卷第 11 题）

已知

$$圆\ C_1:(x+1)^2+y^2=1,$$

$$圆\ C_2:(x-1)^2+y^2=1,$$

$$圆\ C_3:x^2+(y-\sqrt{3})^2=1,$$

直线 $l:y=kx+b$ 与 C_1、C_2、C_3 均有两个交点，记 l 被 C_1、C_2、C_3 截得的弦长分别为 s_1、s_2、s_3，则

(A) k 可以取任意实数

(B) 满足 $s_1=s_2=s_3$ 的直线 l 共有 3 条

(C) 满足 $s_1+s_2+s_3=3$ 的直线 l 多于 3 条

(D) 当 $b=0$ 时，$s_1+s_2+s_3$ 的最大值为 $\dfrac{2\sqrt{21}}{3}$

解析

解答: 令 C_1、C_2、C_3 的圆心分别为 O_1、O_2、O_3，它们到 l 的距离分别为 d_1、d_2、d_3，d_1、d_2、$d_3\in[0,1)$，则 $|O_1O_2|=|O_2O_3|=|O_3O_1|=2$，$C_1,C_2,C_3$ 两两外切，

$$d_1=\sqrt{1-\frac{s_1^2}{4}}=\frac{|b-k|}{\sqrt{k^2+1}},$$

$$d_2=\sqrt{1-\frac{s_2^2}{4}}=\frac{|k+b|}{\sqrt{k^2+1}},$$

$$d_3=\sqrt{1-\frac{s_3^2}{4}}=\frac{|b-\sqrt{3}|}{\sqrt{k^2+1}}.$$

由 $s_1=s_2=s_3$ 解得 $b=0$，$k=\pm\sqrt{3}$ 或 $k=0$，

$b = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 共有 3 条; 故 B 正确.

当 $b = 0$ 时, 由 $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{k^2+1}} = d_3 < 1$ 得 $k^2 > 2$, 由 Cauchy 不等式得

$$\begin{aligned} s_1 + s_2 + s_3 &= \frac{4 + 2\sqrt{k^2-2}}{\sqrt{k^2+1}} \\ &= \frac{4}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{3}{k^2+1}} + 2\sqrt{1 - \frac{3}{k^2+1}} \leqslant \frac{2\sqrt{21}}{3}, \end{aligned}$$

等号成立当且仅当

$$\frac{4}{\sqrt{3}}\sqrt{1 - \frac{3}{k^2+1}} = 2\sqrt{\frac{3}{k^2+1}},$$

即 $k^2 = \dfrac{17}{4}$ 时成立, 故 D 正确, 且 A 错误.

当 $b = 0$ 时, 令 $s_1 + s_2 + s_3 = 3$, 即

$$\frac{4 + 2\sqrt{k^2-2}}{\sqrt{k^2+1}} = 3,$$

解得 $k^2 = \dfrac{171}{25}$, 3, 故 C 正确.

因此, 正确选项为 B、C、D. $\square$