风学数

高考数学

2026 全国高考数学一卷第 18 题

夫 子

题目 (2026 全国高考数学一卷第 18 题)

已知椭圆 $C: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的左焦点为 $F(-1,0)$, 离心率为 $\dfrac{1}{2}$.

(1) 求 C 的方程;

(2) 设 O 为坐标原点, 过 F 且斜率大于 0 的动直线 l 与 C 交于 P、Q 两点, 其中 Q 在第三象限, 直线 PO 与 C 的另一个交点为 R.

(i) 若 $\triangle PQR$ 的面积是 $\triangle PFO$ 的面积的 3 倍, 求 l 的方程;

(ii) 求 $\tan\angle PQR$ 的最小值.

解析

解答: (1) 由 $c=1$ 和 $\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$ 得

$$a^2=4,\quad b^2=a^2-c^2=3.$$

故 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

(2) (i) 连接 FR, 则 $\triangle OFR$、$\triangle QFR$ 和 $\triangle PFO$ 的面积相等. 从而 $\triangle PFR$ 的面积是 $\triangle QFR$ 的面积的 2 倍, 于是 $|FP|=2|FQ|$, 令 l 的参数方程为

$$\begin{cases} x=-1+t\cos\alpha, \\ y=t\sin\alpha. \end{cases}$$

t 为参数, 其中 α 为倾斜角, 且 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, 代入

$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 并整理得

$$(4-\cos^2\alpha)t^2-6t\cos\alpha-9=0.$$

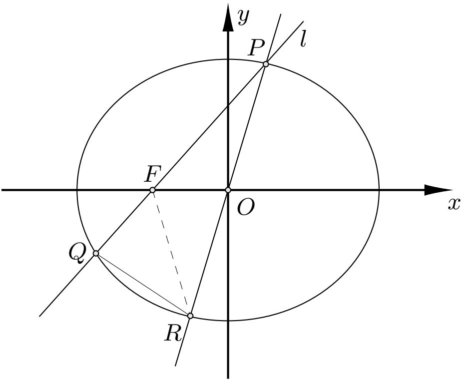
令 $t_1=-2t_2>0$, 则由韦达定理得

$$-t_2=t_1+t_2=\frac{6\cos\alpha}{4-\cos^2\alpha},$$

$$-2t_2^2=t_1t_2=\frac{-9}{4-\cos^2\alpha}.$$

消去 t_2 解得 $\cos\alpha=\dfrac{2}{3}$, 从而 $\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$, 故 l 的方程为

$$y=\frac{\sqrt{5}}{2}(x+1).$$



(2) (ii) 令 $k_{PQ}=k_1$, $k_{QR}=k_2$, 则 $k_1k_2=-\dfrac{3}{4}$,

$$\tan\angle PQR=\left|\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}\right|=4(k_1-k_2)$$

$$\geqslant 8\sqrt{-k_1k_2}=4\sqrt{3},$$

当且仅当 $k_1=-k_2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 时, 等号成立. 故 $\tan\angle PQR$ 的最小值为 $4\sqrt{3}$. $\square$