

图南少年数学人才搜索

费振鹏

2026 年 7 月 12 日

目 录

目 1	第 1 届图南少年数学人才搜索	1
目 2	第 2 届图南少年数学人才搜索	3
目 3	第 3 届图南少年数学人才搜索	5
目 4	第 4 届图南少年数学人才搜索	7
目 5	第 5 届图南少年数学人才搜索	9
目 6	第 6 届图南少年数学人才搜索	11
目 7	第 7 届图南少年数学人才搜索	13
目 8	第 8 届图南少年数学人才搜索	15
目 9	第 9 届图南少年数学人才搜索	17
目 10	第 10 届图南少年数学人才搜索	19
目 11	第 11 届图南少年数学人才搜索	21
目 12	第 12 届图南少年数学人才搜索	23
目 13	第 13 届图南少年数学人才搜索	25
目 14	第 14 届图南少年数学人才搜索	27
目 15	第 15 届图南少年数学人才搜索	29
目 16	第 16 届图南少年数学人才搜索	31

第 1 届图南少年数学人才搜索

校名: _____ 省 _____ 年级: _____ 姓名: _____

考前说明

考试时间: 2026 年 3 月 29 日 9:00 – 10:00. 试卷共 4 道试题, 每题 25 分, 满分 100 分.

题 1.1

偶数 x, y, z 满足不等式 $x^2 + 2y^2 + z^2 + 58 < 4x + yz + 14z$. 求 $x + y^z$ 的值.

题 1.2

如图 1.1, 四边形 $ABCD$ 中, $\angle ABD = \angle ACB = \angle ADB = 75^\circ$, $AC = 7$, $BC = 2$. 求 CD .

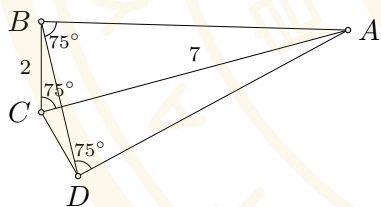


图 1.1

题 1.3

求十进制数 $47^{37^{27}}$ 化为七进制后的末两位数字.

题 1.4

将 $1, 2, \dots, 17$ 按某一顺序排成一行, 使得任意相邻 4 个数的和都不大于 n . 求能够排成时 n 的最小值.

第 2 届图南少年数学人才搜索

校名: _____ 省 _____ 年级: _____ 姓名: _____

考前说明

考试时间: 2026 年 4 月 5 日 9:00 – 10:00. 试卷共 4 道试题, 每题 25 分, 满分 100 分.

题 2.1

已知三次多项式 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, 且当 $x = 1, 2, 3, 4$ 时, $f(x)$ 的值分别为 $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{11}$, 求 $a + d$ 的值.

题 2.2

$\triangle ABC$ 中, $BC = 28, AC = 45, AB = 53$, P 在边 AB 上, Q 是 CP 与 $\triangle ABC$ 的外接圆的另一交点. 求证: $PQ < \frac{2809}{12\sqrt{70}}$.

题 2.3

求最小的正整数 k , 使得 $8^k \equiv 1 \pmod{81}$.

题 2.4

正 19 边形的每个顶点用红、黄、蓝三色之一染色. 由三个同色顶点确定的三角形称为同色三角形. 证明: 无论怎么染色, 由这 19 个顶点可以确定两个同色三角形, 这两个三角形全等, 而且顶点的颜色全相同.

第 3 届图南少年数学人才搜索

校名: _____ 省 _____ 年级: _____ 姓名: _____

考前说明

考试时间: 2026 年 4 月 12 日 9:00 – 10:40. 试卷共 4 道试题, 每题 25 分, 满分 100 分.

题 3.1

整数 a, b, c 满足不等式

$$a^2 + 2b^2 + c^2 + 17 < ab + 7b + 7c.$$

求所有这样的有序整数组 (a, b, c) .

题 3.2

如图 3.1, $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 2BC$, I 是其内心, E 是内切圆 $\odot I$ 与边 AC 的切点, BE 与 $\odot I$ 的另一交点为 P . 求证: A, B, P, I 四点共圆.

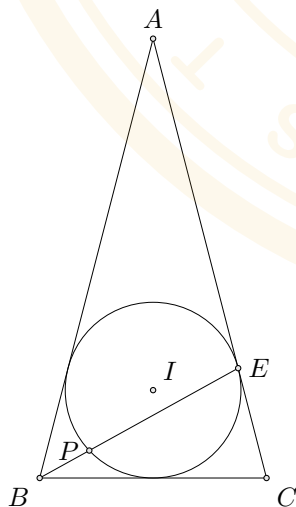


图 3.1

题 3.3

已知 x, y 是正整数, 质数 $p > x$. 求证: 存在正整数 n , 使得 $p \mid x^n - n^y$.

题 3.4

如图 3.2, 平面上网格 11×11 , 将每个格点任意染上红、黄、蓝三色之一. 求证: 总存在一个由图中网格线围成的矩形, 其 4 个顶点为同色格点.

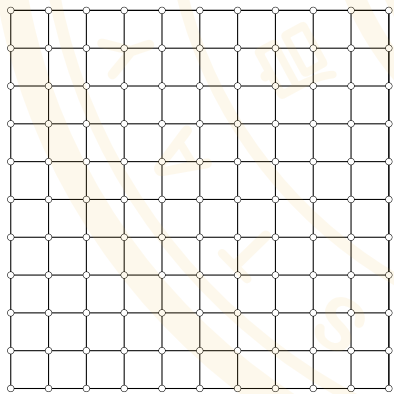


图 3.2

第 4 届图南少年数学人才搜索

校名: _____ 省 _____ 年级: _____ 姓名: _____

考前说明

考试时间: 2026 年 4 月 19 日 9:00 – 10:40. 试卷共 4 道试题, 每题 25 分, 满分 100 分.

题 4.1

求所有三元正整数组 (p, q, n) , 其中 p 和 q 为素数, 且满足

$$20p + 26q = n^2 + 48.$$

题 4.2

如图 4.1, $\triangle ABC$ 满足 $AB < AC$, 外接圆为 Ω , 外心为 O , 内心为 I . 不含 A 的 $\widehat{BC}$ 的中点为 M . 直线 OI 交 Ω 于 E 和 F , 直线 BC 交 ME 、 MF 分别于 K 、 L . 已知 $IA = IM$. 求证: $IKML$ 是矩形.

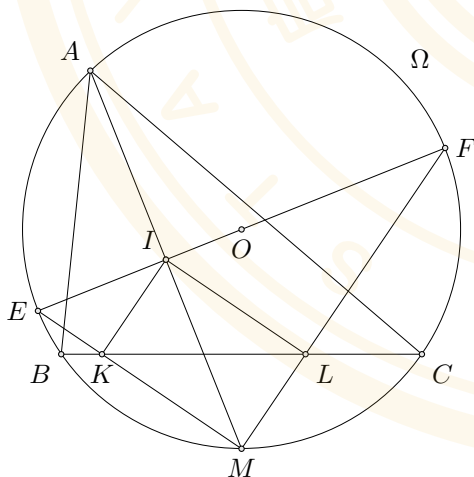


图 4.1

题 4.3

求最大的正整数 n , 使得存在 $i \in \{0, 1, 2, \dots, 2026\}$, 满足

$$(n+i)^2 \mid n(n+1)(n+2)\cdots(n+2026).$$

题 4.4

将正 2026 边形的所有顶点, 一半染成红色, 一半染成蓝色. 若一条直线经过其中的一个红点和一个蓝点, 并且在该直线的每一侧, 红点数与蓝点数相同, 则称此直线为靚线. 求证: 过每个顶点至少有一条靚线, 并求图中靚线条数的最值.

第 5 届图南少年数学人才搜索

校名: _____ 省: _____ 年级: _____ 姓名: _____

考前说明

考试时间: 2026 年 4 月 26 日 9:00-10:40. 试卷共 4 道试题, 每题 25 分, 满分 100 分.

题 5.1

任意锐角三角形 ABC , 能否判断 $\tan A + \tan B + \tan C$ 与 $\cot A + \cot B + \cot C$ 的大小? 若能, 请证明你的结论; 若不能, 请说明理由.

题 5.2

如图 5.1, P 为锐角 $\triangle ABC$ 的 BC 上固定一点, D 是 AP 上靠近 P 的三等分点, E 是形内满足 $EA = ED$ 的一动点, 过 E 作 BC 的垂线交 BC 于 F . 求证: 存在 $\triangle ABC$ 内的定点 G , 满足 $\angle ADE = \angle EFG$.

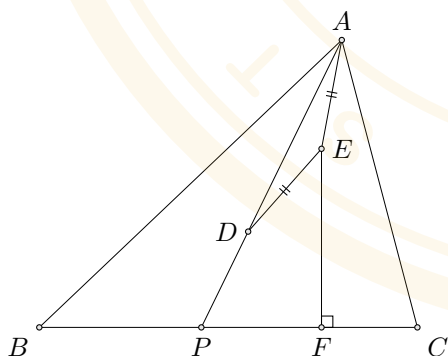


图 5.1

题 5.3

若 $N = \underbrace{20262026 \cdots 2026}_{x \text{ 个 } 2026}$ 能被 999 整除, 求 x 的最小值.

题 5.4

在正方体的每个顶点上记上一个互异正整数, 在其每条棱上记上其两端点上的数的最大公约数. 问是否有可能使顶点上的数之和等于棱上数之和?

第 6 届图南少年数学人才搜索

校名: _____ 省 _____ 年级: _____ 姓名: _____

考前说明

考试时间: 2026 年 5 月 3 日 9:00-10:40. 试卷共 4 道试题, 每题 25 分, 满分 100 分.

题 6.1

已知抛物线 $y = \frac{10}{11}x^2 + 9x + 29$.

- (1) 求证: 存在此抛物线对称轴上的一个定点 F 与平行于 x 轴的定直线 l , 使得此抛物线上任一点到点 F 的距离与到直线 l 的距离相等, 并求点 F 与直线 l ;
- (2) 已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点 A, B, C 在此抛物线上, 且点 F 是其重心, 求 $FA+FB+FC$ 的值.

题 6.2

如图 6.1, $BC = 2$, A 为半径为 1 的 $\odot B$ 上一点, 连 AC , 在 AC 上方作一个正六边形 $ACDEFG$, 连 BD , 求 BD 的最大值.

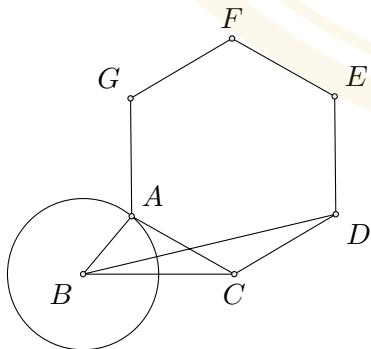


图 6.1

题 6.3

证明: 存在 2026 个连续的正整数, 它们分别能被某个大于 1 的整数的三次方整除.

题 6.4

现将平面上点 A 染成红色, 且这个平面上任意两个相距 2026 的点都被染成同色. 求证: 平面上所有的点都被染成红色.

第 7 届图南少年数学人才搜索

校名: _____ 省 _____ 年级: _____ 姓名: _____

考前说明

考试时间: 2026 年 5 月 10 日 9:00-10:40. 试卷共 4 道试题, 每题 25 分, 满分 100 分.

题 7.1

已知过点 $A(-20, 15)$ 和 $B(6, 30)$ 的抛物线 $y = ax^2 + bx + c$, 对于任意非零的实数 a 恒不过点 $P(x_0 + 5, x_0^2 + 29)$, 求点 P 的坐标.

题 7.2

如图 7.1, 设 O 是锐角三角形 ABC 的外心. 在边 AB 和 AC 上分别取点 K 和 L , 使得 $OK = BK$ 且 $OL = CL$. 三角形 ABC 与 AKL 的外接圆再次交于点 T . 证明: $AT \parallel BC$.

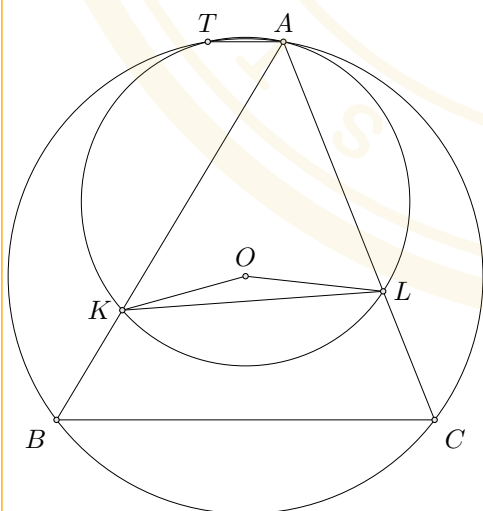


图 7.1

题 7.3

求所有的正整数 x, y , 使得对满足 $x^n - n^y \neq 0$ 的任意正整数 n , 有 $x^n - n^y \mid 25^n - n^{26}$.

题 7.4

给定 13 个大于 1 的正整数中至少有 27 对是互素的. 求证: 其中必存在四个整数 a, b, c, d , 满足 $\gcd(a, b) = \gcd(b, c) = \gcd(c, d) = \gcd(d, a) = 1$.

第 8 届图南少年数学人才搜索

校名: _____ 省 _____ 年级: _____ 姓名: _____

考前说明

考试时间: 2026 年 5 月 17 日 9:00-10:40. 试卷共 4 道试题, 每题 25 分, 满分 100 分.

题 8.1

已知 x, y 为任意实数, 求 $|11x + 3y|$, $|9 - 22y|$, $|11x - 3y|$ 三个数中最大数的最小值.

题 8.2

如图 8.1, AB 为半圆的直径, C 为 $\widehat{AB}$ 上一点, $CD \perp AB$ 于 D , 弦 $CE = CF = CD$, EF 交 CD 于 G . 连 AC 、 BC 分别交 EF 于 H 、 I . 求证: 四边形 $CHDI$ 是矩形, 且 $CG = DG$.

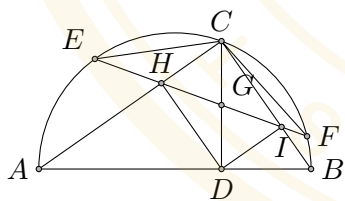


图 8.1

题 8.3

求所有使 $2^{10} + 2^{16} + 2^n$ 为完全平方数的正整数 n .

题 8.4

已知 $M = \{1, 2, \dots, 2026\}$. f 是元素和模 64 余 1 的 M 的子集的个数, s 是元素和模 16 余 4 的 M 的子集的个数. 求证: $s = 4f$.

第 9 届图南少年数学人才搜索

校名: _____ 省 _____ 年级: _____ 姓名: _____

考前说明

考试时间: 2026 年 5 月 24 日 9:00-10:40. 试卷共 4 道试题, 每题 25 分, 满分 100 分.

题 9.1

设 n 为正整数, 非负整数 $x_0, x_1, \dots, x_n$ 满足 $x_0 + x_1 + \dots + x_n = n$. 求证:

$$S = 2^0 x_0 + 2^1 x_1 + \dots + 2^n x_n$$

的最小可能值为 n , 并求此时 $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ 的所有解.

题 9.2

如图 9.1, $ABCD$ 是圆内接四边形, 满足 $AC < BD < AD$ 且 $\angle DBA < 90^\circ$. 点 E 位于过点 D 且平行于 AB 的直线上, 使得 E 与 C 在直线 AD 的异侧, 并且 $AC = DE$. 点 F 位于过点 A 且平行于 CD 的直线上, 使得 F 与 C 在直线 AD 的异侧, 并且 $BD = AF$.

证明: 线段 BC 和 EF 的垂直平分线相交于四边形 $ABCD$ 的外接圆上.

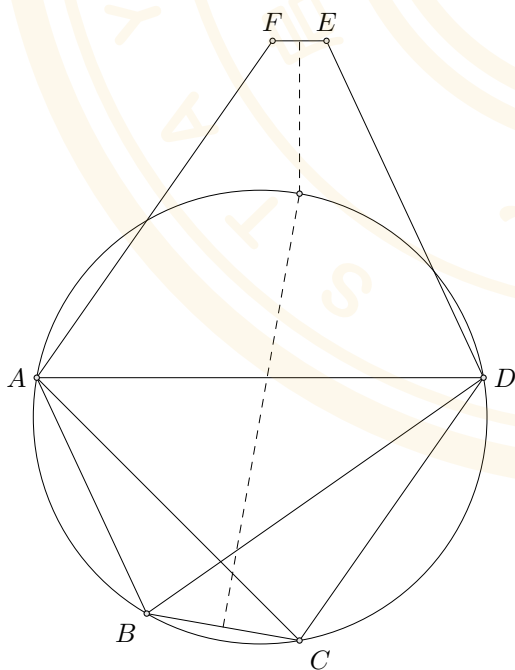


图 9.1

题 9.3

设 $p \neq q$, 且均为 $4k+1$ 型素数, 证明: 存在无穷多个正偶数 n , 使得

$$p \mid (n^2 + 1), \quad q \mid (n^2 + 1).$$

题 9.4

盒子里有 2000 个白球, 另有足够数量的绿球、红球及更多的白球可用. 在盒子里可作如下操作:

- (1) 用 1 个绿球与 2 个白球互换;
- (2) 用 1 个绿球与 2 个红球互换;
- (3) 用 1 个白球、1 个红球与 2 个绿球互换;
- (4) 用 1 个红球与 1 个白球、1 个绿球互换;
- (5) 用 1 个白球与 1 个绿球、1 个红球互换.

请完成下面两个问题:

- (a) 求证: 经有限次操作后, 盒子里可以还剩 3 个球, 并且其中必有 1 个是绿球.
- (b) 经有限次操作后, 盒子里是否可能还剩 1 个球?

第 10 届图南少年数学人才搜索

校名: _____ 省 _____ 年级: _____ 姓名: _____

考前说明

考试时间: 2026 年 5 月 31 日 9:00-10:40. 试卷共 4 道试题, 每题 25 分, 满分 100 分.

题 10.1

已知 $\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{5}{31}$, 求 $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$ 的值.

题 10.2

作图 (写出作法, 保留清晰的作图痕迹, 但不用写出证明过程).

已知: 如图 10.1, $\odot O$ 及直线 l 上一点 A . 求作: 一圆与 $\odot O$ 及 l 都相切, 且切点为 A .

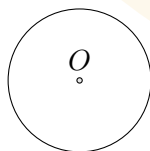


图 10.1

题 10.3

求所有具有以下性质的正整数 n : 对于 n 的所有正因数 d , 都有 $d+1 \mid n$ 或 $d+1$ 是素数.

题 10.4

求证: 任意用红、黄、蓝三种颜色对平面上的点染色, 必存在三个三角形, 它们彼此相似, 其相似比为 $2026:5:31$, 且每个三角形的三顶点同色.

第 11 届图南少年数学人才搜索

校名: _____ 省 _____ 年级: _____ 姓名: _____

考前说明

考试时间: 2026 年 6 月 7 日 9:00 – 10:40. 试卷共 4 道试题, 满分 100 分.

题 11.1 (20 分)

如图 11.1, $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle B = 90^\circ$, D 是 AB 边上一点, $AD = 2BC$, 且 $\angle ACD = 45^\circ$. 求 $\angle A$.

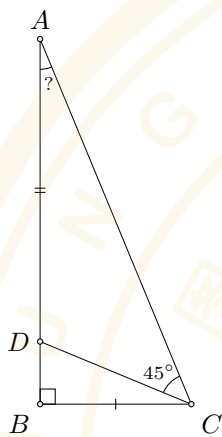


图 11.1

题 11.2 (30 分)

A、B 两个小组在电脑上玩取弹珠游戏, A 组 5 人, B 组 7 人, 他们共有若干个弹珠. 每个人都认定这些弹珠是自己组的, 单独取弹珠时都不知道其他人已经取过. A 组的人将现有弹珠 5 等分后总剩 3 个, 取走这 3 个和其中一份; B 组的人将现有弹珠 7 等分后总剩 2 个, 取走这 2 个和其中一份. 所有人都操作了一次, 次序随机. 问原来至少有多少个弹珠? 最后至少剩多少个弹珠?

题 11.3 (20 分)

已知 p 是质数, 且 $\frac{2^{p-1}-1}{p}$ 是完全平方数, 求满足条件的所有质数 p 的和.

题 11.4 (30 分)

12×12 的方格表中, 每格里放一张纸牌, 每张纸牌一面黑一面白, 开始所有纸牌都黑面朝上. 每次翻转任意 5 个连续的横格、纵格或斜格 (与某条对角线平行) 里的纸牌. 问能否通过有限次操作使得所有纸牌都白面朝上? 说明理由.

第 12 届图南少年数学人才搜索

校名: _____ 省 _____ 年级: _____ 姓名: _____

考前说明

考试时间: 2026 年 6 月 14 日 9:00 – 10:40. 试卷共 4 道试题, 满分 100 分.

题 12.1 (20 分)

设 α, β 是方程 $x^2 - x - 1 = 0$ 的两实数根, 记 $S_n = \alpha^n + \beta^n$, 求 S_{26} 的值.

题 12.2 (30 分)

已知 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 3, 5, 6, G 为其重心, P 为 $\triangle ABC$ 所在平面内一点, 且 $PG = 1$, 求 $PA^2 + PB^2 + PC^2$ 的值.

题 12.3 (20 分)

是否存在一个 26 的倍数, 其二进制表达式恰有 26 个 0, 26 个 1? 如果存在, 请写出一个满足要求的二进制数; 如果不存在, 请说明理由.

题 12.4 (30 分)

如果一个正整数的十进制表示中, 任何两个相邻数字的奇偶性不同, 那么称这个正整数为交替数. 对任意正整数 k , 存在一个 $2k$ 位交替数 $\overline{a_1 a_2 \cdots a_{2k}}$, 满足 $5^{2k} \mid \overline{a_1 a_2 \cdots a_{2k}}$, 其末位是奇数, 其中 a_1 可以为 0.

第 13 届图南少年数学人才搜索

校名: _____ 省 _____ 年级: _____ 姓名: _____

考前说明

考试时间: 2026 年 6 月 21 日 9:00 – 10:40. 试卷共 4 道试题, 满分 100 分.

题 13.1 (20 分)

如图 13.1, 边长为 6 的等边 $\triangle ABC$ 中, D 、 E 分别为 BC 、 AC 边上的动点, 且 $AE = CD$, F 为 AC 的中点, AD 、 BE 交于 G . 求 FG 的最小值.

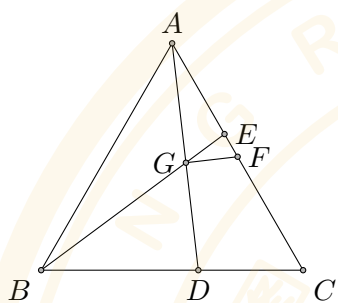


图 13.1

题 13.2 (30 分)

已知 $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = l, \\ y^2 + yz + z^2 = m, \\ z^2 + zx + x^2 = n, \end{cases}$ 用含 l, m, n 的代数式表示 $(xy + yz + zx)^2$.

题 13.3 (20 分)

将任意 2027 个箭头从左到右依次排列, 每个箭头指向左或右. 求证: 存在一个箭头, 它指向的箭头个数与指向它的箭头个数相同.

题 13.4 (30 分)

设 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ 为整数, 对于任意正整数 n 均有

$$a_n = (n-1) \left[\left(\frac{a_2}{2} - 1 \right) n + 2 \right],$$

若 $200 \mid a_{199}$, 求使得 $200 \mid a_n (n > 1)$ 成立的最小正整数 n .

第 14 届图南少年数学人才搜索

校名: _____ 省 _____ 年级: _____ 姓名: _____

考前说明

考试时间: 2026 年 6 月 28 日 9:00 – 10:40. 试卷共 4 道试题, 满分 100 分.

题 14.1 (20 分)

设 a, b, c 是两两不同的复数, 满足

$$a^2 + ab + b^2 = 3(a + b),$$

$$a^2 + ac + c^2 = 3(a + c),$$

$$b^2 + bc + c^2 = 5(b + c) + 1.$$

求 a .

题 14.2 (30 分)

设 ABC 是一个三角形, 其内心为 I , 内切圆为 ω . 三角形 BIC 的外接圆与 ω 相交于 E 和 F 两点. 假设 $\Gamma \neq \omega$ 是一个经过 E 和 F 的圆, 且与直线 AB 和 AC 相切. 若 $AB = 5$, $AC = 7$, 且 Γ 的半径是 ω 的两倍, 求 BC .

题 14.3 (20 分)

黑板上按某种顺序写着数字 $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. Jacob 反复交换黑板上相邻位置的数字, 直到数字按升序排列. 计算初始排列的个数, 使得数字 4 参与交换的次数至多为一次.

题 14.4 (30 分)

黑板上有数 $1, 2, \dots, 2100$. 每秒, Mark 取出黑板上的两个数 a 和 b , 擦去它们, 并代之以 $\gcd(a, b)$ 和 $\text{lcm}(a, b)$. 当任意操作都不会改变黑板上的数时, Mark 停止. 求他停止时黑板上第 2026 小的正整数有多少个正因数.

第 15 届图南少年数学人才搜索

校名: _____ 省 _____ 年级: _____ 姓名: _____

考前说明

考试时间: 2026 年 7 月 5 日 9:00 – 10:40. 试卷共 4 道试题, 满分 100 分.

题 15.1 (20 分)

已知 $\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}$ 是整系数多项式 $f(x)$ 的一个根, 求满足要求的一个多项式 $f(x)$.

题 15.2 (30 分)

已知: 如图 15.1, 等边 $\triangle ABC$ 的边长为 a , O 是其内部任意一点, 过点 O 分别作 $OD \perp AB$ 、 $OE \perp BC$ 、 $OF \perp CA$, 垂足分别为 D 、 E 、 F .

求证: (1) $OD + OE + OF = \frac{\sqrt{3}}{2}a$; (2) $AD + BE + CF = \frac{3}{2}a$.

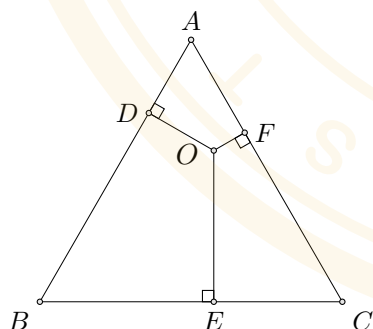


图 15.1

题 15.3 (20 分)

- (1) 将 $705!$ 分解质因数, 求其质因数 7 有多少个;
(2) 将 $\frac{705!}{7^{215}} - 1949$ 化为最简分数 $\frac{y}{x}$, 求 y 的末两位数字.

题 15.4 (30 分)

已知 $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ 是正整数集 $\mathbb{N}^*$ 的任意一个一一映射, 若总存在一个等差数列 $a, a+d, \dots, a+nd$, 其中 $d > 0$, 使得 $f(a) < f(a+d) < \dots < f(a+nd)$. 求数列项数的最大值.

第 16 届图南少年数学人才搜索

校名: _____ 省 _____ 年级: _____ 姓名: _____

考前说明

考试时间: 2026 年 7 月 12 日 9:00 – 10:40. 试卷共 4 道试题, 满分 100 分.

题 16.1 (20 分)

求证: $\sqrt[3]{\frac{\sqrt[4]{5}-3+2\sqrt{5}}{\sqrt[4]{5}+3-2\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt[4]{5}+1}{\sqrt[4]{5}-1}.$

题 16.2 (30 分)

如图 16.1, 正六边形 $ABCDEF$ 的边长为 1, G 是 AB 中点. H 是其内部一点, 满足 $\triangle CGH$ 是正三角形, 求 $\triangle EFH$ 的面积.

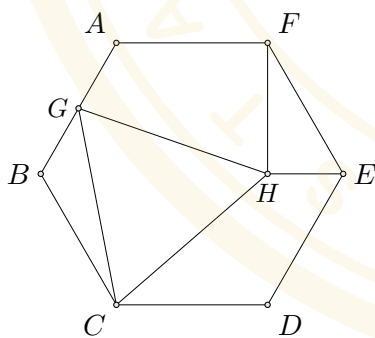


图 16.1

题 16.3 (20 分)

已知 $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ 均为整数, 正整数 n 满足 $n = (x_1^2 - 1)(x_2^2 - 2) \cdots (x_{10}^2 - 10)$. 求 n 的最小值.

题 16.4 (30 分)

12×12 的方格表中, 每格里放一张纸牌, 每张纸牌一面黑一面白, 开始所有纸牌都黑面朝上. 每次翻转任意 5 个连续的横格、纵格或斜格 (与某条对角线平行) 里的纸牌. 问能否通过有限次操作使得所有纸牌都白面朝上? 说明理由.