

图南少年数学人才搜索

费振鹏

2026 年 8 月 2 日

目 录

1	第 1 届图南少年数学人才搜索	1
2	第 2 届图南少年数学人才搜索	3
3	第 3 届图南少年数学人才搜索	5
4	第 4 届图南少年数学人才搜索	7
5	第 5 届图南少年数学人才搜索	9
6	第 6 届图南少年数学人才搜索	11
7	第 7 届图南少年数学人才搜索	13
8	第 8 届图南少年数学人才搜索	15
9	第 9 届图南少年数学人才搜索	17
10	第 10 届图南少年数学人才搜索	19
11	第 11 届图南少年数学人才搜索	21
12	第 12 届图南少年数学人才搜索	23
13	第 13 届图南少年数学人才搜索	25
14	第 14 届图南少年数学人才搜索	27
15	第 15 届图南少年数学人才搜索	29
16	第 16 届图南少年数学人才搜索	31
17	第 17 届图南少年数学人才搜索	33
18	第 18 届图南少年数学人才搜索	35
19	第 19 届图南少年数学人才搜索	37

第 1 届图南少年数学人才搜索

校名: _____ 省 _____ 年级: _____ 姓名: _____

考前说明

考试时间: 2026 年 3 月 29 日 9:00 – 10:00. 试卷共 4 道试题, 每题 25 分, 满分 100 分.

题 1.1

偶数 x, y, z 满足不等式 $x^2 + 2y^2 + z^2 + 58 < 4x + yz + 14z$. 求 $x + y^z$ 的值.

题 1.2

如图 1.1, 四边形 $ABCD$ 中, $\angle ABD = \angle ACB = \angle ADB = 75^\circ$, $AC = 7$, $BC = 2$. 求 CD .

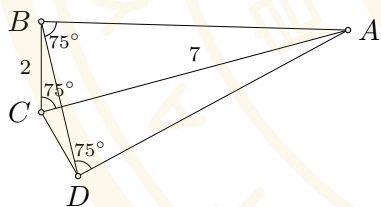


图 1.1

题 1.3

求十进制数 $47^{37^{27}}$ 化为七进制后的末两位数字.

题 1.4

将 $1, 2, \dots, 17$ 按某一顺序排成一行, 使得任意相邻 4 个数的和都不大于 n . 求能够排成时 n 的最小值.

第 2 届图南少年数学人才搜索

校名: _____ 省 _____ 年级: _____ 姓名: _____

考前说明

考试时间: 2026 年 4 月 5 日 9:00 – 10:00. 试卷共 4 道试题, 每题 25 分, 满分 100 分.

题 2.1

已知三次多项式 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, 且当 $x = 1, 2, 3, 4$ 时, $f(x)$ 的值分别为 $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{11}$, 求 $a + d$ 的值.

题 2.2

$\triangle ABC$ 中, $BC = 28, AC = 45, AB = 53$, P 在边 AB 上, Q 是 CP 与 $\triangle ABC$ 的外接圆的另一交点. 求证: $PQ < \frac{2809}{12\sqrt{70}}$.

题 2.3

求最小的正整数 k , 使得 $8^k \equiv 1 \pmod{81}$.

题 2.4

正 19 边形的每个顶点用红、黄、蓝三色之一染色. 由三个同色顶点确定的三角形称为同色三角形. 证明: 无论怎么染色, 由这 19 个顶点可以确定两个同色三角形, 这两个三角形全等, 而且顶点的颜色全相同.

第 3 届图南少年数学人才搜索

校名: _____ 省 _____ 年级: _____ 姓名: _____

考前说明

考试时间: 2026 年 4 月 12 日 9:00 – 10:40. 试卷共 4 道试题, 每题 25 分, 满分 100 分.

题 3.1

整数 a, b, c 满足不等式

$$a^2 + 2b^2 + c^2 + 17 < ab + 7b + 7c.$$

求所有这样的有序整数组 (a, b, c) .

题 3.2

如图 3.1, $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 2BC$, I 是其内心, E 是内切圆 $\odot I$ 与边 AC 的切点, BE 与 $\odot I$ 的另一交点为 P . 求证: A, B, P, I 四点共圆.

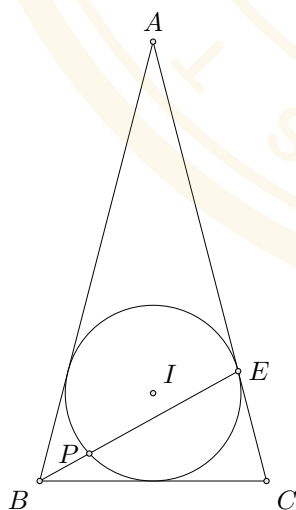


图 3.1

题 3.3

已知 x, y 是正整数, 质数 $p > x$. 求证: 存在正整数 n , 使得 $p \mid x^n - n^y$.

题 3.4

如图 3.2, 平面上网格 11×11 , 将每个格点任意染上红、黄、蓝三色之一. 求证: 总存在一个由图中网格线围成的矩形, 其 4 个顶点为同色格点.

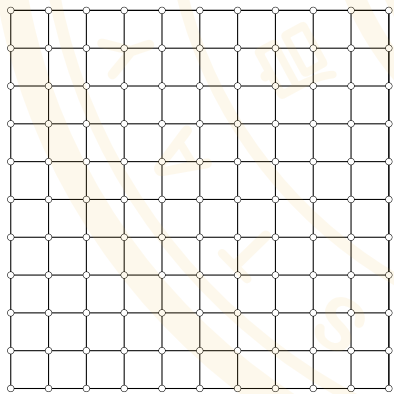


图 3.2

第 4 届图南少年数学人才搜索

校名: _____ 省 _____ 年级: _____ 姓名: _____

考前说明

考试时间: 2026 年 4 月 19 日 9:00 – 10:40. 试卷共 4 道试题, 每题 25 分, 满分 100 分.

题 4.1

求所有三元正整数组 (p, q, n) , 其中 p 和 q 为素数, 且满足

$$20p + 26q = n^2 + 48.$$

题 4.2

如图 4.1, $\triangle ABC$ 满足 $AB < AC$, 外接圆为 Ω , 外心为 O , 内心为 I . 不含 A 的 $\widehat{BC}$ 的中点为 M . 直线 OI 交 Ω 于 E 和 F , 直线 BC 交 ME 、 MF 分别于 K 、 L . 已知 $IA = IM$. 求证: $IKML$ 是矩形.

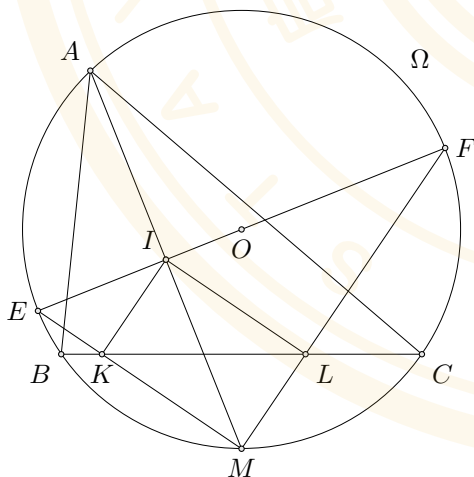


图 4.1

题 4.3

求最大的正整数 n , 使得存在 $i \in \{0, 1, 2, \dots, 2026\}$, 满足

$$(n+i)^2 \mid n(n+1)(n+2)\cdots(n+2026).$$

题 4.4

将正 2026 边形的所有顶点, 一半染成红色, 一半染成蓝色. 若一条直线经过其中的一个红点和一个蓝点, 并且在该直线的每一侧, 红点数与蓝点数相同, 则称此直线为靚线. 求证: 过每个顶点至少有一条靚线, 并求图中靚线条数的最值.

第 5 届图南少年数学人才搜索

校名: _____ 省: _____ 年级: _____ 姓名: _____

考前说明

考试时间: 2026 年 4 月 26 日 9:00-10:40. 试卷共 4 道试题, 每题 25 分, 满分 100 分.

题 5.1

任意锐角三角形 ABC , 能否判断 $\tan A + \tan B + \tan C$ 与 $\cot A + \cot B + \cot C$ 的大小? 若能, 请证明你的结论; 若不能, 请说明理由.

题 5.2

如图 5.1, P 为锐角 $\triangle ABC$ 的 BC 上固定一点, D 是 AP 上靠近 P 的三等分点, E 是形内满足 $EA = ED$ 的一动点, 过 E 作 BC 的垂线交 BC 于 F . 求证: 存在 $\triangle ABC$ 内的定点 G , 满足 $\angle ADE = \angle EFG$.

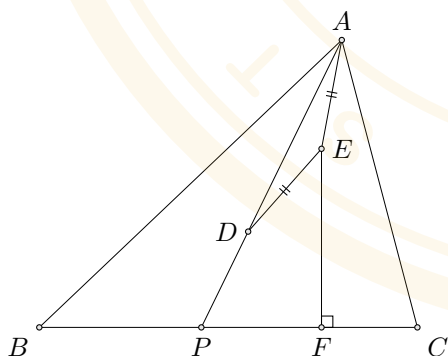


图 5.1

题 5.3

若 $N = \underbrace{20262026 \cdots 2026}_{x \text{ 个 } 2026}$ 能被 999 整除, 求 x 的最小值.

题 5.4

在正方体的每个顶点上记上一个互异正整数, 在其每条棱上记上其两端点上的数的最大公约数. 问是否有可能使顶点上的数之和等于棱上数之和?

第 6 届图南少年数学人才搜索

校名: _____ 省 _____ 年级: _____ 姓名: _____

考前说明

考试时间: 2026 年 5 月 3 日 9:00-10:40. 试卷共 4 道试题, 每题 25 分, 满分 100 分.

题 6.1

已知抛物线 $y = \frac{10}{11}x^2 + 9x + 29$.

- (1) 求证: 存在此抛物线对称轴上的一个定点 F 与平行于 x 轴的定直线 l , 使得此抛物线上任一点到点 F 的距离与到直线 l 的距离相等, 并求点 F 与直线 l ;
- (2) 已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点 A, B, C 在此抛物线上, 且点 F 是其重心, 求 $FA+FB+FC$ 的值.

题 6.2

如图 6.1, $BC = 2$, A 为半径为 1 的 $\odot B$ 上一点, 连 AC , 在 AC 上方作一个正六边形 $ACDEFG$, 连 BD , 求 BD 的最大值.

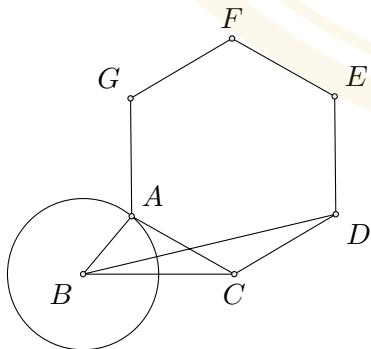


图 6.1

题 6.3

证明: 存在 2026 个连续的正整数, 它们分别能被某个大于 1 的整数的三次方整除.

题 6.4

现将平面上点 A 染成红色, 且这个平面上任意两个相距 2026 的点都被染成同色. 求证: 平面上所有的点都被染成红色.

第 7 届图南少年数学人才搜索

校名: _____ 省 _____ 年级: _____ 姓名: _____

考前说明

考试时间: 2026 年 5 月 10 日 9:00-10:40. 试卷共 4 道试题, 每题 25 分, 满分 100 分.

题 7.1

已知过点 $A(-20, 15)$ 和 $B(6, 30)$ 的抛物线 $y = ax^2 + bx + c$, 对于任意非零的实数 a 恒不过点 $P(x_0 + 5, x_0^2 + 29)$, 求点 P 的坐标.

题 7.2

如图 7.1, 设 O 是锐角三角形 ABC 的外心. 在边 AB 和 AC 上分别取点 K 和 L , 使得 $OK = BK$ 且 $OL = CL$. 三角形 ABC 与 AKL 的外接圆再次交于点 T . 证明: $AT \parallel BC$.

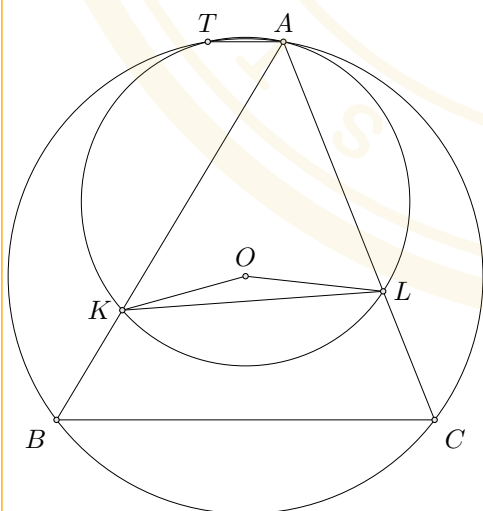


图 7.1

题 7.3

求所有的正整数 x, y , 使得对满足 $x^n - n^y \neq 0$ 的任意正整数 n , 有 $x^n - n^y \mid 25^n - n^{26}$.

题 7.4

给定 13 个大于 1 的正整数中至少有 27 对是互素的. 求证: 其中必存在四个整数 a, b, c, d , 满足 $\gcd(a, b) = \gcd(b, c) = \gcd(c, d) = \gcd(d, a) = 1$.

第 8 届图南少年数学人才搜索

校名: _____ 省 _____ 年级: _____ 姓名: _____

考前说明

考试时间: 2026 年 5 月 17 日 9:00-10:40. 试卷共 4 道试题, 每题 25 分, 满分 100 分.

题 8.1

已知 x, y 为任意实数, 求 $|11x + 3y|$, $|9 - 22y|$, $|11x - 3y|$ 三个数中最大数的最小值.

题 8.2

如图 8.1, AB 为半圆的直径, C 为 $\widehat{AB}$ 上一点, $CD \perp AB$ 于 D , 弦 $CE = CF = CD$, EF 交 CD 于 G . 连 AC 、 BC 分别交 EF 于 H 、 I . 求证: 四边形 $CHDI$ 是矩形, 且 $CG = DG$.

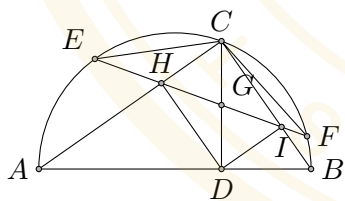


图 8.1

题 8.3

求所有使 $2^{10} + 2^{16} + 2^n$ 为完全平方数的正整数 n .

题 8.4

已知 $M = \{1, 2, \dots, 2026\}$. f 是元素和模 64 余 1 的 M 的子集的个数, s 是元素和模 16 余 4 的 M 的子集的个数. 求证: $s = 4f$.

第 9 届图南少年数学人才搜索

校名: _____ 省 _____ 年级: _____ 姓名: _____

考前说明

考试时间: 2026 年 5 月 24 日 9:00-10:40. 试卷共 4 道试题, 每题 25 分, 满分 100 分.

题 9.1

设 n 为正整数, 非负整数 $x_0, x_1, \dots, x_n$ 满足 $x_0 + x_1 + \dots + x_n = n$. 求证:

$$S = 2^0 x_0 + 2^1 x_1 + \dots + 2^n x_n$$

的最小可能值为 n , 并求此时 $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ 的所有解.

题 9.2

如图 9.1, $ABCD$ 是圆内接四边形, 满足 $AC < BD < AD$ 且 $\angle DBA < 90^\circ$. 点 E 位于过点 D 且平行于 AB 的直线上, 使得 E 与 C 在直线 AD 的异侧, 并且 $AC = DE$. 点 F 位于过点 A 且平行于 CD 的直线上, 使得 F 与 C 在直线 AD 的异侧, 并且 $BD = AF$.

证明: 线段 BC 和 EF 的垂直平分线相交于四边形 $ABCD$ 的外接圆上.

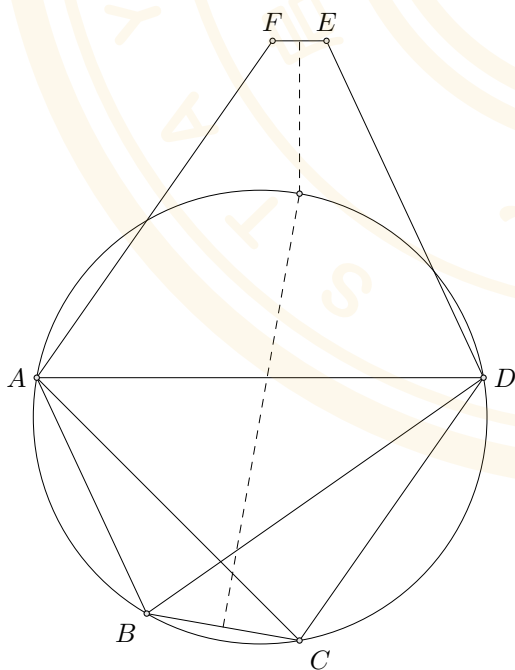


图 9.1

题 9.3

设 $p \neq q$, 且均为 $4k+1$ 型素数, 证明: 存在无穷多个正偶数 n , 使得

$$p \mid (n^2 + 1), \quad q \mid (n^2 + 1).$$

题 9.4

盒子里有 2000 个白球, 另有足够数量的绿球、红球及更多的白球可用. 在盒子里可作如下操作:

- (1) 用 1 个绿球与 2 个白球互换;
- (2) 用 1 个绿球与 2 个红球互换;
- (3) 用 1 个白球、1 个红球与 2 个绿球互换;
- (4) 用 1 个红球与 1 个白球、1 个绿球互换;
- (5) 用 1 个白球与 1 个绿球、1 个红球互换.

请完成下面两个问题:

- (a) 求证: 经有限次操作后, 盒子里可以还剩 3 个球, 并且其中必有 1 个是绿球.
- (b) 经有限次操作后, 盒子里是否可能还剩 1 个球?

第 10 届图南少年数学人才搜索

校名: _____ 省 _____ 年级: _____ 姓名: _____

考前说明

考试时间: 2026 年 5 月 31 日 9:00-10:40. 试卷共 4 道试题, 每题 25 分, 满分 100 分.

题 10.1

已知 $\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{5}{31}$, 求 $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$ 的值.

题 10.2

作图 (写出作法, 保留清晰的作图痕迹, 但不用写出证明过程).

已知: 如图 10.1, $\odot O$ 及直线 l 上一点 A . 求作: 一圆与 $\odot O$ 及 l 都相切, 且切点为 A .

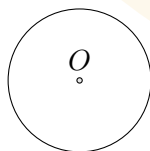


图 10.1

题 10.3

求所有具有以下性质的正整数 n : 对于 n 的所有正因数 d , 都有 $d+1 \mid n$ 或 $d+1$ 是素数.

题 10.4

求证: 任意用红、黄、蓝三种颜色对平面上的点染色, 必存在三个三角形, 它们彼此相似, 其相似比为 $2026:5:31$, 且每个三角形的三顶点同色.

第 11 届图南少年数学人才搜索

校名: _____ 省 _____ 年级: _____ 姓名: _____

考前说明

考试时间: 2026 年 6 月 7 日 9:00 – 10:40. 试卷共 4 道试题, 满分 100 分.

题 11.1 (20 分)

如图 11.1, $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle B = 90^\circ$, D 是 AB 边上一点, $AD = 2BC$, 且 $\angle ACD = 45^\circ$. 求 $\angle A$.

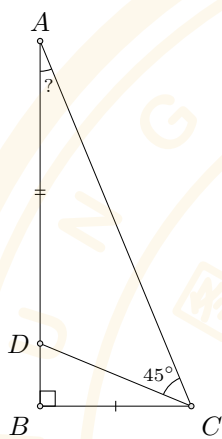


图 11.1

题 11.2 (30 分)

A、B 两个小组在电脑上玩取弹珠游戏, A 组 5 人, B 组 7 人, 他们共有若干个弹珠. 每个人都认定这些弹珠是自己组的, 单独取弹珠时都不知道其他人已经取过. A 组的人将现有弹珠 5 等分后总剩 3 个, 取走这 3 个和其中一份; B 组的人将现有弹珠 7 等分后总剩 2 个, 取走这 2 个和其中一份. 所有人都操作了一次, 次序随机. 问原来至少有多少个弹珠? 最后至少剩多少个弹珠?

题 11.3 (20 分)

已知 p 是质数, 且 $\frac{2^{p-1}-1}{p}$ 是完全平方数, 求满足条件的所有质数 p 的和.

题 11.4 (30 分)

12×12 的方格表中, 每格里放一张纸牌, 每张纸牌一面黑一面白, 开始所有纸牌都黑面朝上. 每次翻转任意 5 个连续的横格、纵格或斜格 (与某条对角线平行) 里的纸牌. 问能否通过有限次操作使得所有纸牌都白面朝上? 说明理由.

第 12 届图南少年数学人才搜索

校名: _____ 省 _____ 年级: _____ 姓名: _____

考前说明

考试时间: 2026 年 6 月 14 日 9:00 – 10:40. 试卷共 4 道试题, 满分 100 分.

题 12.1 (20 分)

设 α, β 是方程 $x^2 - x - 1 = 0$ 的两实数根, 记 $S_n = \alpha^n + \beta^n$, 求 S_{26} 的值.

题 12.2 (30 分)

已知 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 3, 5, 6, G 为其重心, P 为 $\triangle ABC$ 所在平面内一点, 且 $PG = 1$, 求 $PA^2 + PB^2 + PC^2$ 的值.

题 12.3 (20 分)

是否存在一个 26 的倍数, 其二进制表达式恰有 26 个 0, 26 个 1? 如果存在, 请写出一个满足要求的二进制数; 如果不存在, 请说明理由.

题 12.4 (30 分)

如果一个正整数的十进制表示中, 任何两个相邻数字的奇偶性不同, 那么称这个正整数为交替数. 对任意正整数 k , 存在一个 $2k$ 位交替数 $\overline{a_1 a_2 \cdots a_{2k}}$, 满足 $5^{2k} \mid \overline{a_1 a_2 \cdots a_{2k}}$, 其末位是奇数, 其中 a_1 可以为 0.

第 13 届图南少年数学人才搜索

校名: _____ 省 _____ 年级: _____ 姓名: _____

考前说明

考试时间: 2026 年 6 月 21 日 9:00 – 10:40. 试卷共 4 道试题, 满分 100 分.

题 13.1 (20 分)

如图 13.1, 边长为 6 的等边 $\triangle ABC$ 中, D 、 E 分别为 BC 、 AC 边上的动点, 且 $AE = CD$, F 为 AC 的中点, AD 、 BE 交于 G . 求 FG 的最小值.

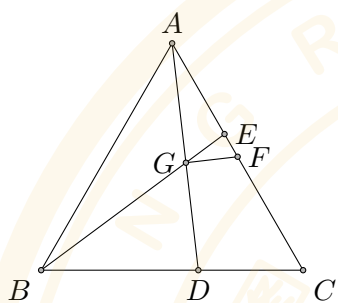


图 13.1

题 13.2 (30 分)

已知 $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = l, \\ y^2 + yz + z^2 = m, \\ z^2 + zx + x^2 = n, \end{cases}$ 用含 l, m, n 的代数式表示 $(xy + yz + zx)^2$.

题 13.3 (20 分)

将任意 2027 个箭头从左到右依次排列, 每个箭头指向左或右. 求证: 存在一个箭头, 它指向的箭头个数与指向它的箭头个数相同.

题 13.4 (30 分)

设 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ 为整数, 对于任意正整数 n 均有

$$a_n = (n-1) \left[\left(\frac{a_2}{2} - 1 \right) n + 2 \right],$$

若 $200 \mid a_{199}$, 求使得 $200 \mid a_n (n > 1)$ 成立的最小正整数 n .

第 14 届图南少年数学人才搜索

校名: _____ 省 _____ 年级: _____ 姓名: _____

考前说明

考试时间: 2026 年 6 月 28 日 9:00 – 10:40. 试卷共 4 道试题, 满分 100 分.

题 14.1 (20 分)

设 a, b, c 是两两不同的复数, 满足

$$a^2 + ab + b^2 = 3(a + b),$$

$$a^2 + ac + c^2 = 3(a + c),$$

$$b^2 + bc + c^2 = 5(b + c) + 1.$$

求 a .

题 14.2 (30 分)

设 ABC 是一个三角形, 其内心为 I , 内切圆为 ω . 三角形 BIC 的外接圆与 ω 相交于 E 和 F 两点. 假设 $\Gamma \neq \omega$ 是一个经过 E 和 F 的圆, 且与直线 AB 和 AC 相切. 若 $AB = 5$, $AC = 7$, 且 Γ 的半径是 ω 的两倍, 求 BC .

题 14.3 (20 分)

黑板上按某种顺序写着数字 $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. Jacob 反复交换黑板上相邻位置的数字, 直到数字按升序排列. 计算初始排列的个数, 使得数字 4 参与交换的次数至多为一次.

题 14.4 (30 分)

黑板上有数 $1, 2, \dots, 2100$. 每秒, Mark 取出黑板上的两个数 a 和 b , 擦去它们, 并代之以 $\gcd(a, b)$ 和 $\text{lcm}(a, b)$. 当任意操作都不会改变黑板上的数时, Mark 停止. 求他停止时黑板上第 2026 小的正整数有多少个正因数.

第 15 届图南少年数学人才搜索

校名: _____ 省: _____ 年级: _____ 姓名: _____

考前说明

考试时间: 2026 年 7 月 5 日 9:00 – 10:40. 试卷共 4 道试题, 满分 100 分.

题 15.1 (20 分)

已知 $\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}$ 是整系数多项式 $f(x)$ 的一个根, 求满足要求的一个多项式 $f(x)$.

题 15.2 (30 分)

已知: 如图 15.1, 等边 $\triangle ABC$ 的边长为 a , O 是其内部任意一点, 过点 O 分别作 $OD \perp AB$ 、 $OE \perp BC$ 、 $OF \perp CA$, 垂足分别为 D 、 E 、 F .

求证: (1) $OD + OE + OF = \frac{\sqrt{3}}{2}a$; (2) $AD + BE + CF = \frac{3}{2}a$.

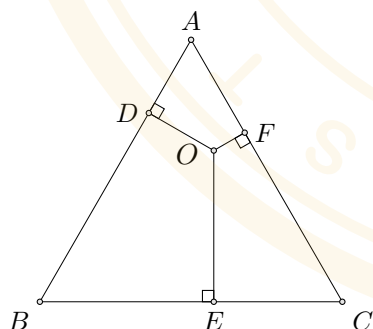


图 15.1

题 15.3 (20 分)

- (1) 将 $705!$ 分解质因数, 求其质因数 7 有多少个;
(2) 将 $\frac{705!}{7^{215}} - 1949$ 化为最简分数 $\frac{y}{x}$, 求 y 的末两位数字.

题 15.4 (30 分)

已知 $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ 是正整数集 $\mathbb{N}^*$ 的任意一个一一映射, 若总存在一个等差数列 $a, a+d, \dots, a+nd$, 其中 $d > 0$, 使得 $f(a) < f(a+d) < \dots < f(a+nd)$. 求数列项数的最大值.

第 16 届图南少年数学人才搜索

校名: _____ 省 _____ 年级: _____ 姓名: _____

考前说明

考试时间: 2026 年 7 月 12 日 9:00 – 10:40. 试卷共 4 道试题, 满分 100 分.

题 16.1 (20 分)

求证: $\sqrt[3]{\frac{\sqrt[4]{5}-3+2\sqrt{5}}{\sqrt[4]{5}+3-2\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt[4]{5}+1}{\sqrt[4]{5}-1}.$

题 16.2 (30 分)

如图 16.1, 正六边形 $ABCDEF$ 的边长为 1, G 是 AB 中点. H 是其内部一点, 满足 $\triangle CGH$ 是正三角形, 求 $\triangle EFH$ 的面积.

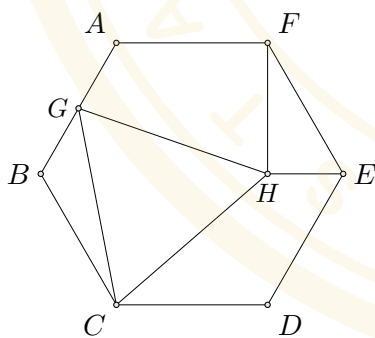


图 16.1

题 16.3 (20 分)

已知 $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ 均为整数, 正整数 n 满足 $n = (x_1^2 - 1)(x_2^2 - 2) \cdots (x_{10}^2 - 10)$. 求 n 的最小值.

题 16.4 (30 分)

12×12 的方格表中, 每格里放一张纸牌, 每张纸牌一面黑一面白, 开始所有纸牌都黑面朝上. 每次翻转任意 5 个连续的横格、纵格或斜格 (与某条对角线平行) 里的纸牌. 问能否通过有限次操作使得所有纸牌都白面朝上? 说明理由.

第 17 届图南少年数学人才搜索

校名: _____ 省 _____ 年级: _____ 姓名: _____

考前说明

考试时间: 2026 年 7 月 19 日 9:00 – 10:40. 试卷共 4 道试题, 满分 100 分.

题 17.1 (20 分)

若 n 是正整数, n^2 和 n^3 的位数之和为 8, 且 1 到 8 这八个数字都恰好出现一次, 求所有这样的 n .

题 17.2 (30 分)

如图 17.1, 在正五边形 $ABCDE$ 中, BE 、 AC 交于点 F , 过 F 的一条直线分别交 AB 、 CD 于 G 、 H , 满足 $BG = 4$, $CH = 5$. 求 AG 的长度.

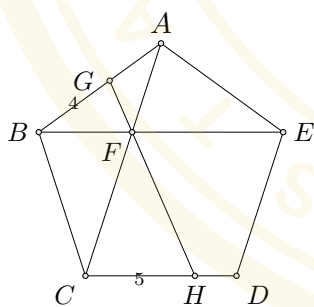


图 17.1

题 17.3 (20 分)

在十位数字和千位数字都是 2 的四位数中, 7 的倍数有多少个?

题 17.4 (30 分)

对于正整数 k , 我们将满足下列两个条件的 k 个正整数 $a_1, a_2, \dots, a_k$ 称为长度为 k 的“好数列”:

- (1) 这 k 个正整数互不相同, 且都不大于 30.
- (2) 对所有 $i = 1, 2, \dots, k-1$, 若 i 是奇数, 则 a_{i+1} 是 a_i 的倍数; 若 i 是偶数, 则 a_{i+1} 是 a_i 的约数.

求“好数列”长度的最大值.

第 18 届图南少年数学人才搜索

校名: _____ 省 _____ 年级: _____ 姓名: _____

考前说明

考试时间: 2026 年 7 月 26 日 9:00 – 10:40. 试卷共 4 道试题, 满分 100 分.

题 18.1 (20 分)

已知实数 a, b, c, d 互异且 $2a + \frac{1}{9b} = 2b + \frac{1}{9c} = 2c + \frac{1}{9d} = 2d + \frac{1}{9a} = x$, 求 x 的所有可能值.

题 18.2 (30 分)

$\triangle ABC$ 的内心为 I , $\angle BAC = 70^\circ$, $AC + AI = BC$, 求 $\angle AIB$.

题 18.3 (20 分)

已知 $2^n \mid (2027^{2^{100}} - 2025^{2^{100}})$, 求 n 的最大值.

题 18.4 (30 分)

从 $1, 2, \dots, 32$ 中任意选取 k 个数, 使得其中一定存在两个数, 且一个数是另一个数的 2 倍. 求 k 的最小值.

第 19 届图南少年数学人才搜索

校名: _____ 省 _____ 年级: _____ 姓名: _____

考前说明

考试时间: 2026 年 8 月 2 日 9:00 – 10:40. 试卷共 4 道试题, 满分 100 分.

题 19.1 (20 分)

100 个正整数 $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ 满足下列两个条件:

(1) 对所有 $2 \leq k \leq 100$, 都有 $a_{k-1} < a_k$.

(2) 对所有 $6 \leq k \leq 100$, 都有 a_k 是 $2a_1, 2a_2, \dots, 2a_{k-1}$ 中的一个数.

求 a_{100} 可能满足的最小值.

题 19.2 (30 分)

如图 19.1, 设 P 是 $\triangle ABC$ 内一点, 且 $\angle BAP = \angle PAC$, $PA \cdot BC = PB \cdot CA = PC \cdot AB$, 求 $\angle PBA$ 的所有可能值.

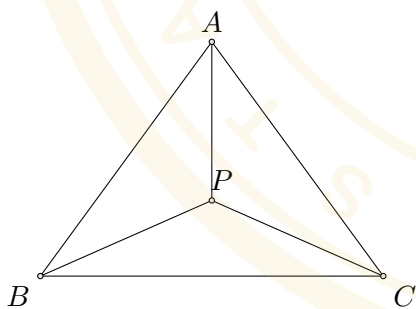


图 19.1

题 19.3 (20 分)

求证: 连续的两个正整数的平方和的质因数除以 4 余 1.

题 19.4 (30 分)

已知 n, k 为正整数, $n > k$. 有一块正方形的土地被划分为了 $n \times n$ 个小块, 且每个小块都是同样大小的正方形. 目前需要 k 台拖拉机来犁地. 每个拖拉机都从左下角出发, 向右上角移动. 拖拉机的移动方式为只能向右或向上移动到与其当前单元格相邻的单元格 (这里的相邻指有公共边). 求未被犁过的单元格个数的最小值.