第 1-21 届
图南少年数学人才搜索试题解析

张振鹏 编写

數學風
平增

第 1-21 届图南少年数学人才搜索试题解析

费振鹏



fzp@omaths.com

2026-10

目　　录

卷　　首 **1**

1 作者简介 1

2 内容导读 1

试题全集 **3**

1 第 1 届图南少年数学人才搜索试题 3

2 第 2 届图南少年数学人才搜索试题 7

3 第 3 届图南少年数学人才搜索试题 11

4 第 4 届图南少年数学人才搜索试题 15

5 第 5 届图南少年数学人才搜索试题 19

6 第 6 届图南少年数学人才搜索试题 23

7 第 7 届图南少年数学人才搜索试题 27

8 第 8 届图南少年数学人才搜索试题 31

9 第 9 届图南少年数学人才搜索试题 35

10 第 10 届图南少年数学人才搜索试题 39

11 第 11 届图南少年数学人才搜索试题 43

12 第 12 届图南少年数学人才搜索试题 47

13 第 13 届图南少年数学人才搜索试题 51

14 第 14 届图南少年数学人才搜索试题 55

15 第 15 届图南少年数学人才搜索试题 59

16 第 16 届图南少年数学人才搜索试题 63

17 第 17 届图南少年数学人才搜索试题 67

18 第 18 届图南少年数学人才搜索试题 71

19 第 19 届图南少年数学人才搜索试题 75

20 第 20 届图南少年数学人才搜索试题 79

21 第 21 届图南少年数学人才搜索试题 83

文　　后 **87**

1 编后小记 87

2 符号释义 88

卷　首

作者简介



费振鹏　1972 年生于江苏盐城. 曾经担任沈阳市东北育才学校数学特长班、深圳市耀华实验学校华文数学班、佛山市梅沙双语学校珠峰班的中学数学竞赛专职教练. 全国初、高中数学联赛优秀指导老师 (教练). 培养少年数学人才成绩显著. 近年来, 多名学生通过数学竞赛获得保送或大学校测资格, 其中初三程大拙、高一伍港荣、张海洋考取清华大学丘成桐求真书院本硕博连读, 高一林轩名考取中国科学技术大学少年创新实验班 (华罗庚实验班), 高三胡莫考取北京大学, 高一林轩名荣获北京大学金秋营数学银牌, 另有多名初、高中学生荣获全国中学生数学奥林匹克预、决赛奖牌等 (指导初三白天衣获青少年数学国际城市邀请赛个人满分金牌、白天衣等团体金牌, 另有百余名学生获全国初高中数学联赛一等奖, 白天衣、梁宇辰等学生获 CMO 金牌并进入 IMO 国家集训队等). 在国家核心期刊《数学通报》、《数学教学》、《中等数学》、《中学数学教学参考》、《中学数学研究》、《中学数学月刊》等发表数学竞赛教学论文几十篇, 主编《初中综合数学》(辽宁教育出版社)、《学数学》(高中数学竞赛与大学自主招生专辑第 1 ～ 6 卷, 中国科学技术大学出版社) 等, 指导胡莫等多名学生在中学数学期刊上发表数学解题研究文章.

内容导读

图南少年数学人才搜索 (Ambition Young Mathematical Talent Search, 简称 AYMTS). 它旨在选拔和培养具有杰出数学天赋的少年学生, 通过解决挑战性问题来锻炼其分析、推理和严谨表达能力. 它是一项少年学生的个人竞赛. 本书把 21 届试题汇成一辑, 不是做一本“答案仓库”, 而是做一座“思维训练场”. 卷内每道试题, 会让我们在留白、提示、解析与反思中, 完成一次次独立的数学对话.

一、规则在变, 追求不变

考试时间的延长、试题难度的增加、试题分值的调整、答题的过程表达要求等变化不是琐碎细节, 而是将这项赛事逐渐规范化. 但对考试的内核始终未变: 独立、限时、严谨、清晰, 并明确禁止讨论、计算工具和 AI 工具. 本书的留空与提示设计, 也正是为了守护这种独立: 不先给答案, 而是让孩子先想、先写、先留下痕迹.

二、四个板块, 都是批发

每届试题包含 4 道题目, 涵盖代数、几何、数论、组合, 难度梯度设计, 旨在全面检验各模块掌握情况, 并识别薄弱模块、定位短板环节. 各模块分值权重交替调整, 这直接影响答题策略 (是平均用力, 或者先抢稳分, 还是留时间攻坚), 也能在查明问题及成因后, 及时采取针对性补救与强化措施, 做到查漏补缺、固强补弱, 形成“考查—诊断—反馈—弥补—提升”的闭环, 实现以考促学. 纵向对比 21 届, 能看出哪些板块反复出现, 哪些问题逐年翻新, 哪些能力被反复强调.

三、编排留空，求解反思

本书最用心的编排，是每道试题后都先留空，再配上思路提示与解析过程.

留空，是思考的邀请. 初学时，孩子可以在空白处独立写第一遍思路；复习时，可以换一种颜色补充新方法；冲刺时，还可以遮住解析重做，比较前后思路的变化. 那些涂改、停顿、划掉又重写的痕迹，正是思维成长的证据. 本书鼓励孩子保留自己的思考痕迹，而不是一遇到卡壳就翻看答案.

思路提示，像一位温和的老师，在孩子即将放弃时递上一根拐杖，但路仍要孩子自己走. 当思维精疲力尽时，再学习完整的解析过程. 学习过程中，可以再练审题、条件转化、方法选择，到步骤书写、检验回顾，完整呈现. 典型题还给出一题多解、易错警示等. 由于评分标准强调数学正确性、格式规范性和解释的清晰度，解析会特别示范如何把推理写清楚、把步骤写完整、把结论写严谨.

解题反思，把“做对一道题”变成“收获一类方法”. 孩子可以写下：我为什么卡住？关键突破口是什么？下次遇到同类题先想什么？时间分配是否合理？书写是否规范？这一栏，正是本书希望孩子长期保留的思考痕迹.

四、怎么用好这本书

第一轮，按届次做：限时、独立、不翻答案，先暴露真实问题.

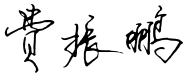
第二轮，按专题做：把 21 届中代数、几何、数论、组合的同类题集中对比，找命题规律.

第三轮，只看错题与反思：利用原来的留空重做，看看自己是否真的懂了.

家长和老师使用时，不必急着讲答案，可以先让孩子讲自己的思路，再对照提示与解析，最后补写反思.

结语

21 届试题，不是 21 份负担，而是 21 次与命题人对话的机会. 这本书通过“试题—留空—提示—解析—反思”的编排，想培养的不是记住多少答案，而是面对新题时，仍然知道从哪里开始想、怎样走下去、如何回头检查. 它适合学生自学，也适合教师备课、家长陪伴. 愿每一次留白，都成为孩子思维生长的空间.



试题全集

第 1 届国南少年数学人才拔萃试题

考前说明

考试时间: 2026 年 3 月 29 日 $9:00-10:00$. 试卷共 4 道试题, 每题 25 分, 满分 100 分.

题 1.1

偶数 x、y、z 满足不等式 $x^2+2y^2+z^2+58<4x+yz+14z$. 求 $x+y^z$ 的值.

题 1.2

如图 1.1, 四边形 $ABCD$ 中, $\angle ABD = \angle ACB = \angle ADB = 75°$, $AC = 7$, $BC = 2$. 求 CD.

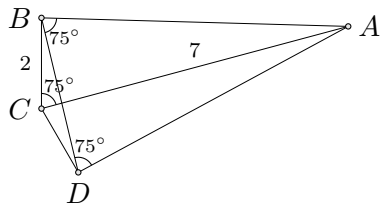


图 1.1

题 1.3

求十进制数 $47^{37^{27}}$ 化为七进制后的末两位数字.

题 1.4

将 $1, 2, \cdots, 17$ 按某一顺序排成一行, 使得任意相邻 4 个数的和都不大于 n. 求能够排成时 n 的最小值.

第 2 届国南少年数学人才拔萃试题

考前说明

考试时间: 2026 年 4 月 5 日 $9:00-10:00$. 试卷共 4 道试题, 每题 25 分, 满分 100 分.

题 2.1

已知三次多项式 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, 且当 $x=1,2,3,4$ 时, $f(x)$ 的值分别为 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{11}$, 求 $a+d$ 的值.

题 2.2

$\triangle ABC$ 中, $BC=28$, $AC=45$, $AB=53$, P 在边 AB 上, Q 是 CP 与 $\triangle ABC$ 的外接圆的另一交点. 求证: $PQ<\dfrac{2809}{12\sqrt{70}}$.

题 2.3

求最小的正整数 k, 使得 $8^k \equiv 1 \pmod{81}$.

题 2.4

正 19 边形的每个顶点用红、黄、蓝三色之一染色. 由三个同色顶点确定的三角形称为同色三角形. 证明: 无论怎么染色, 由这 19 个顶点可以确定两个同色三角形, 这两个三角形全等, 而且顶点的颜色全相同.

第 3 届国南少年数学人才拔萃试题

考前说明

考试时间: 2026 年 4 月 12 日 $9:00-10:40$. 试卷共 4 道试题, 每题 25 分, 满分 100 分.

题 3.1

整数 a,b,c 满足不等式

$$a^2+2b^2+c^2+17<ab+7b+7c.$$

求所有这样的有序整数组 (a,b,c).

题 3.2

如图 3.1, $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 2BC$, I 是其内心, E 是内切圆 $\odot I$ 与边 AC 的切点, BE 与 $\odot I$ 的另一交点为 P. 求证: A、B、P、I 四点共圆.

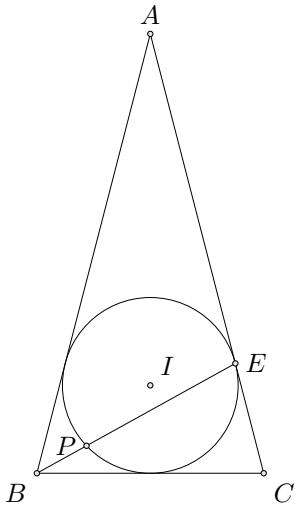


图 3.1

题 3.3

已知 x, y 是正整数, 质数 $p > x$. 求证: 存在正整数 n, 使得 $p \mid x^n - n^y$.

题 3.4

如图 3.2, 平面上网格 11×11, 将每个格点任意染上红、黄、蓝三色之一.

求证: 总存在一个由图中网格线围成的矩形, 其 4 个顶点为同色格点.

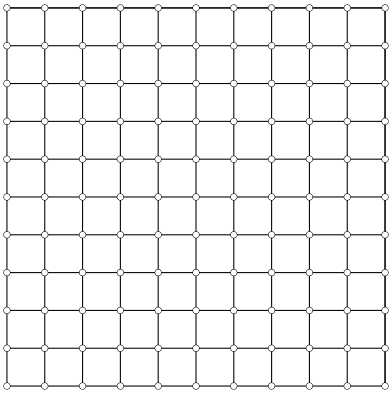


图 3.2

第 4 届国南少年数学人才拔萃试题

考前说明

考试时间: 2026 年 4 月 19 日 $9:00-10:40$. 试卷共 4 道试题, 每题 25 分, 满分 100 分.

题 4.1

求所有三元正整数组 (p,q,n), 其中 p 和 q 为素数, 且满足

$$20p+26q=n^2+48.$$

题 4.2

如图 4.1, $\triangle ABC$ 满足 $AB < AC$, 外接圆为 Ω, 外心为 O, 内心为 I. 不含 A 的 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点为 M. 直线 OI 交 Ω 于 E 和 F, 直线 BC 交 ME、MF 分别于 K、L. 已知 $IA = IM$.

求证: $IKML$ 是矩形.

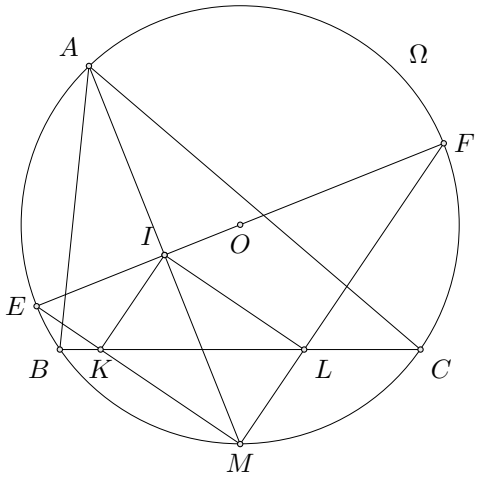


图 4.1

题 4.3

求最大的正整数 n, 使得存在 $i \in \{0, 1, 2, \cdots, 2026\}$, 满足

$$(n+i)^2 \mid n(n+1)(n+2)\cdots(n+2026).$$

题 4.4

将正 2026 边形的所有顶点, 一半染成红色, 一半染成蓝色. 若一条直线经过其中的一个红点和一个蓝点, 并且在该直线的每一侧, 红点数与蓝点数相同, 则称此直线为靓线. 求证: 过每个顶点至少有一条靓线, 并求图中靓线条数的最值.

第 5 届国南少年数学人才拔萃试题

考前说明

考试时间: 2026 年 4 月 26 日 9:00-10:40. 试卷共 4 道试题, 每题 25 分, 满分 100 分.

题 5.1

任意锐角三角形 ABC, 能否判断 $\tan A+\tan B+\tan C$ 与 $\cot A+\cot B+\cot C$ 的大小? 若能, 请证明你的结论; 若不能, 请说明理由.

题 5.2

如图 5.1, P 为锐角 $\triangle ABC$ 的 BC 上固定一点, D 是 AP 上靠近 P 的三等分点, E 是形内满足 $EA = ED$ 的一动点, 过 E 作 BC 的垂线交 BC 于 F. 求证: 存在 $\triangle ABC$ 内的定点 G, 满足 $\angle ADE = \angle EFG$.

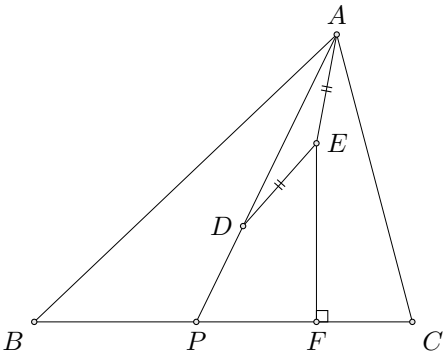


图 5.1

题 5.3

若 $N=\underbrace{20262026\cdots2026}_{x\text{ 个 }2026}$ 能被 999 整除, 求 x 的最小值.

题 5.4

在正方体的每个顶点上记上一个互异正整数, 在其每条棱上记上其两端点上的数的最大公约数. 问是否有可能使顶点上的数之和等于棱上数之和?

第 6 届国南少年数学人才拔萃试题

考前说明

考试时间: 2026 年 5 月 3 日 9:00-10:40. 试卷共 4 道试题, 每题 25 分, 满分 100 分.

题 6.1

已知抛物线 $y=\dfrac{10}{11}x^2+9x+29$.

(1) 求证: 存在此抛物线对称轴上的一个定点 F 与平行于 x 轴的定直线 l, 使得此抛物线上任一点到点 F 的距离与到直线 l 的距离相等, 并求点 F 与直线 l;

(2) 已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点 A、B、C 在此抛物线上, 且点 F 是其重心, 求 $FA+FB+FC$ 的值.

题 6.2

如图 6.1, $BC=2$, A 为半径为 1 的 $\odot B$ 上一点, 连 AC, 在 AC 上方作一个正六边形 $ACDEFG$, 连 BD, 求 BD 的最大值.

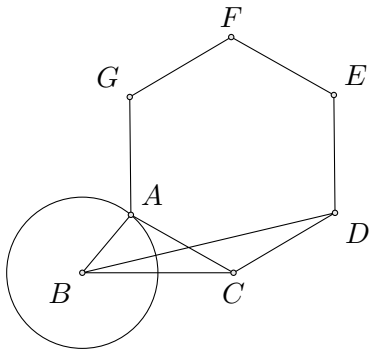


图 6.1

题 6.3

证明: 存在 2026 个连续的正整数, 它们分别能被某个大于 1 的整数的三次方整除.

题 6.4

现将平面上点 A 染成红色, 且这个平面上任意两个相距 2026 的点都被染成同色. 求证: 平面上所有的点都被染成红色.

第 7 届国南少年数学人才拔萃选题

考前说明

考试时间: 2026 年 5 月 10 日 9:00-10:40. 试卷共 4 道试题, 每题 25 分, 满分 100 分.

题 7.1

已知过点 $A(-20,15)$ 和 $B(6,30)$ 的抛物线 $y=ax^2+bx+c$, 对于任意非零的实数 a 恒不过点 $P\left(x_0+5,x_0^2+29\right)$, 求点 P 的坐标.

题 7.2

如图 7.1, 设 O 是锐角三角形 ABC 的外心. 在边 AB 和 AC 上分别取点 K 和 L, 使得 $OK = BK$ 且 $OL = CL$. 三角形 ABC 与 AKL 的外接圆再次交于点 T. 证明: $AT \parallel BC$.

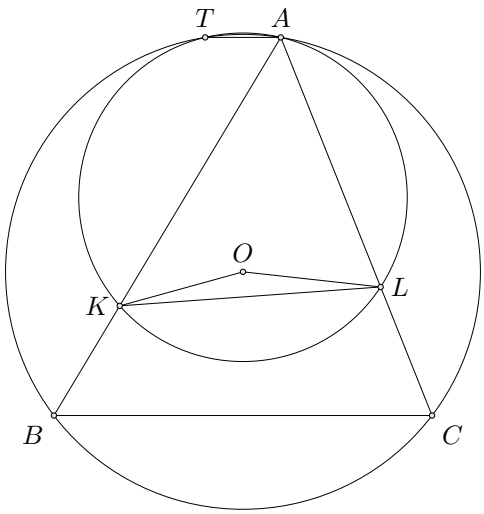


图 7.1

题 7.3

求所有的正整数 x, y, 使得对满足 $x^n - n^y \neq 0$ 的任意正整数 n, 有 $x^n - n^y \mid 25^n - n^{26}$.

题 7.4

给定 13 个大于 1 的正整数中至少有 27 对是互素的. 求证: 其中必存在四个整数 a, b, c, d, 满足 $\gcd(a,b)=\gcd(b,c)=\gcd(c,d)=\gcd(d,a)=1$.

第 8 届国南少年数学人才拔萃选题

考前说明

考试时间: 2026 年 5 月 17 日 9:00-10:40. 试卷共 4 道试题, 每题 25 分, 满分 100 分.

题 8.1

已知 x, y 为任意实数, 求 $|11x+3y|$, $|9-22y|$, $|11x-3y|$ 三个数中最大数的最小值.

题 8.2

如图 8.1, AB 为半圆的直径, C 为 $\overset{\frown}{AB}$ 上一点, $CD \perp AB$ 于 D, 弦 $CE = CF = CD$, EF 交 CD 于 G. 连 AC、BC 分别交 EF 于 H、I. 求证: 四边形 $CHDI$ 是矩形, 且 $CG = DG$.

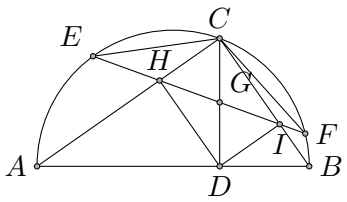


图 8.1

题 8.3

求所有使 $2^{10}+2^{16}+2^n$ 为完全平方数的正整数 n.

题 8.4

已知 $M=\{1,2,\cdots,2026\}$. f 是元素和模 64 余 1 的 M 的子集的个数, s 是元素和模 16 余 4 的 M 的子集的个数. 求证: $s=4f$.

第 9 届国南少年数学人才拔萃试题

考前说明

考试时间: 2026 年 5 月 24 日 9:00-10:40. 试卷共 4 道试题, 每题 25 分, 满分 100 分.

题 9.1

设 n 为正整数, 非负整数 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 满足 $x_0 + x_1 + \cdots + x_n = n$. 求证:

$$S = 2^0 x_0 + 2^1 x_1 + \cdots + 2^n x_n$$

的最小可能值为 n, 并求此时 $(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ 的所有解.

题 9.2

如图 9.1, $ABCD$ 是圆内接四边形, 满足 $AC < BD < AD$ 且 $\angle DBA < 90°$. 点 E 位于过点 D 且平行于 AB 的直线上, 使得 E 与 C 在直线 AD 的异侧, 并且 $AC = DE$. 点 F 位于过点 A 且平行于 CD 的直线上, 使得 F 与 C 在直线 AD 的异侧, 并且 $BD = AF$.

证明: 线段 BC 和 EF 的垂直平分线相交于四边形 $ABCD$ 的外接圆上.

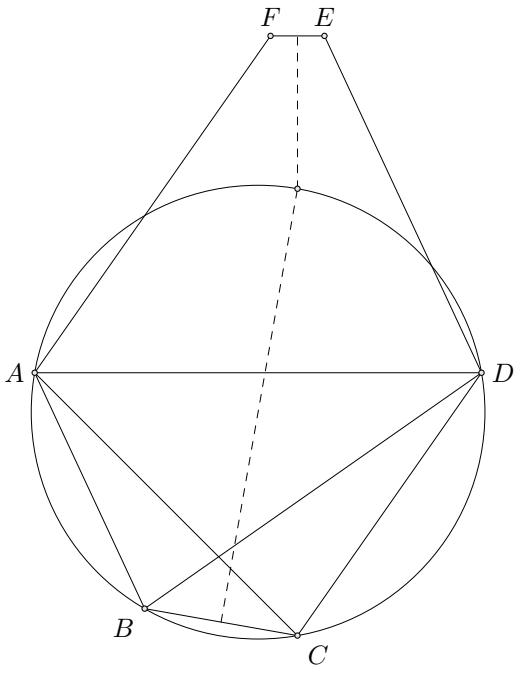


图 9.1

题 9.3

设 $p \neq q$, 且均为 $4k+1$ 型素数, 证明: 存在无穷多个正偶数 n, 使得

$$p \mid (n^2+1), \qquad q \mid (n^2+1).$$

题 9.4

盒子里有 2000 个白球, 另有足够数量的绿球、红球及更多的白球可用. 在盒子里可作如下操作:

(1) 用 1 个绿球与 2 个白球互换;

(2) 用 1 个绿球与 2 个红球互换;

(3) 用 1 个白球、1 个红球与 2 个绿球互换;

(4) 用 1 个红球与 1 个白球、1 个绿球互换;

(5) 用 1 个白球与 1 个绿球、1 个红球互换.

请完成下面两个问题:

(a) 求证: 经有限次操作后, 盒子里可以还剩 3 个球, 并且其中必有 1 个是绿球.

(b) 经有限次操作后, 盒子里是否可能还剩 1 个球?

第 10 届田南少年数学人才技术试题

考前说明

考试时间: 2026 年 5 月 31 日 9:00-10:40. 试卷共 4 道试题, 每题 25 分, 满分 100 分.

题 10.1

已知 $\dfrac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\dfrac{5}{31}$, 求 $\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{b+c}+\dfrac{c}{c+a}$ 的值.

题 10.2

作图 (写出作法, 保留清晰的作图痕迹, 但不用写出证明过程).

已知: 如图 10.1, $\odot O$ 及直线 l 上一点 A. 求作: 一圆与 $\odot O$ 及 l 都相切, 且切点为 A.

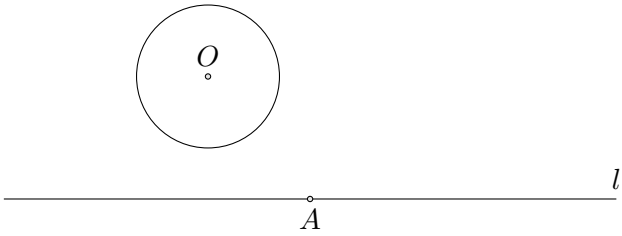


图 10.1

题 10.3

求所有具有以下性质的正整数 n: 对于 n 的所有正因数 d, 都有 $d+1 \mid n$ 或 $d+1$ 是素数.

题 10.4

求证: 任意用红、黄、蓝三种颜色对平面上的点染色, 必存在三个三角形, 它们彼此相似, 其相似比为 $2026:5:31$, 且每个三角形的三顶点同色.

第 11 届田南少年数学人才技术试题

考前说明

考试时间: 2026 年 6 月 7 日 9 : 00 – 10 : 40. 试卷共 4 道试题, 满分 100 分.

题 11.1 (20 分)

如图 11.1, Rt$\triangle ABC$ 中, $\angle B = 90°$, D 是 AB 边上一点, $AD = 2BC$, 且 $\angle ACD = 45°$. 求 $\angle A$.

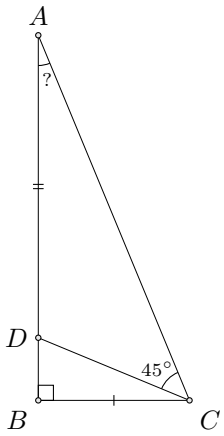


图 11.1

题 11.2 (30 分)

A、B 两个小组在电脑上玩取弹珠游戏, A 组 5 人, B 组 7 人, 他们共有若干个弹珠. 每人都认定这些弹珠是自己组的, 单独取弹珠时都不知道其他人已经取过. A 组的人将现有弹珠 5 等分后总剩 3 个, 取走这 3 个和其中一份; B 组的人将现有弹珠 7 等分后总剩 2 个, 取走这 2 个和其中一份. 所有人都操作了一次, 次序随机. 问原来至少有多少个弹珠? 最后至少剩多少个弹珠?

题 11.3 (20 分)

已知 p 是质数, 且 $\dfrac{2^{p-1}-1}{p}$ 是完全平方数, 求满足条件的所有质数 p 的和.

题 11.4 (30 分)

12×12 的方格表中, 每格里放一张纸牌, 每张纸牌一面黑一面白, 开始所有纸牌都黑面朝上. 每次翻转任意 5 个连续的横格、纵格或斜格 (与某条对角线平行) 里的纸牌. 问能否通过有限次操作使得所有纸牌都白面朝上? 说明理由.

第 12 届田南少年数学人才技术试题

考前说明

考试时间: 2026 年 6 月 14 日 $9:00-10:40$. 试卷共 4 道试题, 满分 100 分.

题 12.1 (20 分)

设 α,β 是方程 $x^2-x-1=0$ 的两实数根, 记 $S_n=\alpha^n+\beta^n$, 求 S_{26} 的值.

题 12.2 (30 分)

已知 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 3, 5, 6, G 为其重心, P 为 $\triangle ABC$ 所在平面内一点, 且 $PG = 1$, 求 $PA^2 + PB^2 + PC^2$ 的值.

题 12.3 (20 分)

是否存在一个 26 的倍数, 其二进制表达式恰有 26 个 0, 26 个 1? 如果存在, 请写出一个满足要求的二进制数; 如果不存在, 请说明理由.

题 12.4 (30 分)

如果一个正整数的十进制表示中, 任何两个相邻数字的奇偶性不同, 那么称这个正整数为交替数. 对任意正整数 k, 存在一个 $2k$ 位交替数 $\overline{a_1a_2\cdots a_{2k}}$, 满足 $5^{2k} \mid \overline{a_1a_2\cdots a_{2k}}$, 其末位是奇数, 其中 a_1 可以为 0.

第 13 届田南少年数学人才技术试题

考前说明

考试时间: 2026 年 6 月 21 日 9 : 00 – 10 : 40. 试卷共 4 道试题, 满分 100 分.

题 13.1 (20 分)

如图 13.1, 边长为 6 的等边 $\triangle ABC$ 中, D、E 分别为 BC、AC 边上的动点, 且 $AE = CD$, F 为 AC 的中点, AD、BE 交于 G. 求 FG 的最小值.

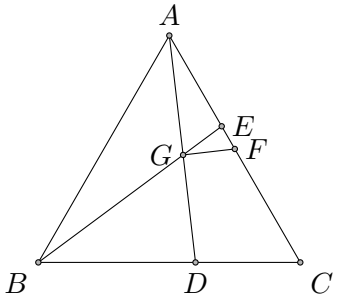


图 13.1

题 13.2 (30 分)

已知 $\begin{cases} x^2+xy+y^2=l, \\ y^2+yz+z^2=m, \\ z^2+zx+x^2=n, \end{cases}$ 用含 l, m, n 的代数式表示 $(xy+yz+zx)^2$.

题 13.3 (20 分)

将任意 2027 个箭头从左到右依次排列, 每个箭头指向左或右. 求证: 存在一个箭头, 它指向的箭头个数与指向它的箭头个数相同.

题 13.4 (30 分)

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 为整数, 对于任意正整数 n 均有

$$a_n = (n-1)\left[\left(\frac{a_2}{2} - 1\right) n + 2\right],$$

若 $200 \mid a_{199}$, 求使得 $200 \mid a_n\,(n > 1)$ 成立的最小正整数 n.

第 14 届田南少年数学人才技术试题

考前说明

考试时间: 2026 年 6 月 28 日 9 : 00 – 10 : 40. 试卷共 4 道试题, 满分 100 分.

题 14.1 (20 分)

设 a, b, c 是两两不同的复数, 满足

$$a^2 + ab + b^2 = 3(a + b),$$
$$a^2 + ac + c^2 = 3(a + c),$$
$$b^2 + bc + c^2 = 5(b + c) + 1.$$

求 a.

题 14.2 (30 分)

设 ABC 是一个三角形, 其内心为 I, 内切圆为 ω. 三角形 BIC 的外接圆与 ω 相交于 E 和 F 两点. 假设 $\Gamma \neq \omega$ 是一个经过 E 和 F 的圆, 且与直线 AB 和 AC 相切. 若 $AB = 5$, $AC = 7$, 且 Γ 的半径是 ω 的两倍, 求 BC.

题 14.3 (20 分)

黑板上按某种顺序写着数字 $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. Jacob 反复交换黑板上相邻位置的数字, 直到数字按升序排列. 计算初始排列的个数, 使得数字 4 参与交换的次数至多为一次.

题 14.4 (30 分)

黑板上有数 $1, 2, \cdots, 2100$. 每秒, Mark 取出黑板上的两个数 a 和 b, 擦去它们, 并代之以 $\gcd(a, b)$ 和 $\operatorname{lcm}(a, b)$. 当任意操作都不会改变黑板上的数时, Mark 停止. 求他停止时黑板上第 2026 小的正整数有多少个正因数.

第 15 届田南少年数学人才技术试题

考前说明

考试时间: 2026 年 7 月 5 日 9 : 00 – 10 : 40. 试卷共 4 道试题, 满分 100 分.

题 15.1 (20 分)

已知 $\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}$ 是整系数多项式 $f(x)$ 的一个根, 求满足要求的一个多项式 $f(x)$.

题 15.2 (30 分)

已知: 如图 15.1, 等边 $\triangle ABC$ 的边长为 a, O 是其内部任意一点, 过点 O 分别作 $OD \perp AB$、$OE \perp BC$、$OF \perp CA$, 垂足分别为 D、E、F.

求证: (1) $OD + OE + OF = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$; (2) $AD + BE + CF = \dfrac{3}{2}a$.

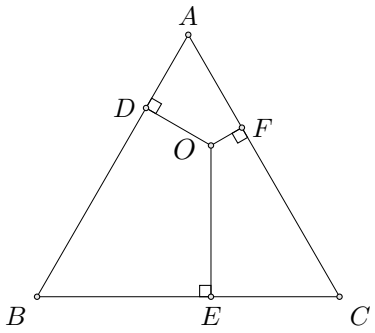


图 15.1

题 15.3 (20 分)

(1) 将 $705!$ 分解质因数, 求其质因数 7 有多少个;

(2) 将 $\dfrac{705!}{7^{215}}-1949$ 化为最简分数 $\dfrac{y}{x}$, 求 y 的末两位数字.

题 15.4 (30 分)

已知 $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ 是正整数集 $\mathbb{N}^*$ 的任意一个一一映射, 若总存在一个等差数列 $a,a+d,\cdots,a+nd$, 其中 $d>0$, 使得 $f(a)<f(a+d)<\cdots<f(a+nd)$. 求数列项数的最大值.

第 16 届田南少年数学人才技术试题

考前说明

考试时间: 2026 年 7 月 12 日 9 : 00 − 10 : 40. 试卷共 4 道试题, 满分 100 分.

题 16.1 (20 分)

求证: $\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt[4]{5}-3+2\sqrt{5}}{\sqrt[4]{5}+3-2\sqrt{5}}}=\dfrac{\sqrt[4]{5}+1}{\sqrt[4]{5}-1}$.

题 16.2 (30 分)

如图 16.1, 正六边形 $ABCDEF$ 的边长为 1, G 是 AB 中点. H 是其内部一点, 满足 $\triangle CGH$ 是正三角形, 求 $\triangle EFH$ 的面积.

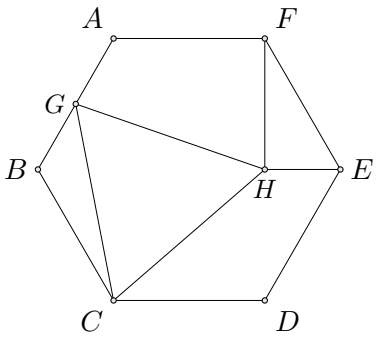


图 16.1

题 16.3 (20 分)

已知 $x_1, x_2, \cdots, x_{10}$ 均为整数, 正整数 n 满足 $n = (x_1^2 - 1)(x_2^2 - 2)\cdots(x_{10}^2 - 10)$. 求 n 的最小值.

题 16.4 (30 分)

12×12 的方格表中, 每格里放一张纸牌, 每张纸牌一面黑一面白, 开始所有纸牌都黑面朝上. 每次翻转任意 5 个连续的横格、纵格或斜格 (与某条对角线平行) 里的纸牌. 问能否通过有限次操作使得所有纸牌都白面朝上? 说明理由.

第 17 届田南少年数学人才技术试题

考前说明

考试时间: 2026 年 7 月 19 日 $9:00-10:40$. 试卷共 4 道试题, 满分 100 分.

题 17.1 (20 分)

若 n 是正整数, n^2 和 n^3 的位数之和为 8, 且 1 到 8 这八个数字都恰好出现一次, 求所有这样的 n.

题 17.2 (30 分)

如图 17.1, 在正五边形 $ABCDE$ 中, BE、AC 交于点 F, 过 F 的一条直线分别交 AB、CD 于 G、H, 满足 $BG = 4$, $CH = 5$. 求 AG 的长度.

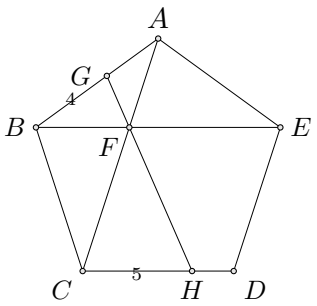


图 17.1

题 17.3 (20 分)

在十位数字和千位数字都是 2 的四位数中, 7 的倍数有多少个?

题 17.4 (30 分)

对于正整数 k, 我们将满足下列两个条件的 k 个正整数 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 称为长度为 k 的“好数列”:

(1) 这 k 个正整数互不相同, 且都不大于 30.

(2) 对所有 $i = 1, 2, \cdots, k-1$, 若 i 是奇数, 则 a_{i+1} 是 a_i 的倍数; 若 i 是偶数, 则 a_{i+1} 是 a_i 的约数.

求“好数列”长度的最大值.

第 18 届田南少年数学人才技术试题

考前说明

考试时间: 2026 年 7 月 26 日 9 : 00 – 10 : 40. 试卷共 4 道试题, 满分 100 分.

题 18.1 (20 分)

已知实数 a, b, c, d 互异且 $2a+\dfrac{1}{9b}=2b+\dfrac{1}{9c}=2c+\dfrac{1}{9d}=2d+\dfrac{1}{9a}=x$, 求 x 的所有可能值.

题 18.2 (30 分)

$\triangle ABC$ 的内心为 I, $\angle BAC = 70^\circ$, $AC + AI = BC$, 求 $\angle AIB$.

题 18.3 (20 分)

已知 $2^n \mid \left(2027^{2^{100}} - 2025^{2^{100}}\right)$, 求 n 的最大值.

题 18.4 (30 分)

从 $1, 2, \cdots, 32$ 中任意选取 k 个数, 使得其中一定存在两个数, 且一个数是另一个数的 2 倍. 求 k 的最小值.

第 19 届田南少年数学人才技术试题

考前说明

考试时间: 2026 年 8 月 2 日 9 : 00 – 10 : 40. 试卷共 4 道试题, 满分 100 分.

题 19.1 (20 分)

100 个正整数 $a_1, a_2, \cdots, a_{100}$ 满足下列两个条件:

(1) 对所有 $2 \leqslant k \leqslant 100$, 都有 $a_{k-1} < a_k$.

(2) 对所有 $6 \leqslant k \leqslant 100$, 都有 a_k 是 $2a_1, 2a_2 \cdots, 2a_{k-1}$ 中的一个数.

求 a_{100} 可能满足的最小值.

题 19.2 (30 分)

如图 19.1, 设 P 是 $\triangle ABC$ 内一点, 且 $\angle BAP = \angle PAC$, $PA \cdot BC = PB \cdot CA = PC \cdot AB$, 求 $\angle PBA$ 的所有可能值.

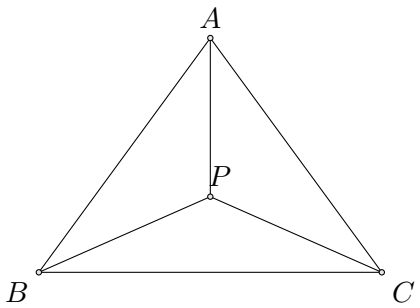


图 19.1

题 19.3 (20 分)

求证: 连续的两个正整数的平方和的质因数除以 4 余 1.

题 19.4 (30 分)

已知 n, k 为正整数, $n > k$. 有一块正方形的土地被划分为了 $n \times n$ 个小块, 且每个小块都是同样大小的正方形. 目前需要 k 台拖拉机来犁地. 每个拖拉机都从左下角出发, 向右上角移动. 拖拉机的移动方式为只能向右或向上移动到与其当前单元格相邻的单元格 (这里的相邻指有公共边). 求未被犁过的单元格个数的最小值.

第 20 届田南少年数学人才技术试题

考前说明

考试时间: 2026 年 8 月 9 日 9 : 00 – 10 : 40. 试卷共 4 道试题, 满分 100 分.

题 20.1 (20 分)

求证: 任何一个正分数都能写成一个或者若干个两两不同的正整数的倒数和.

题 20.2 (30 分)

一个包里有 m 个球, 另一个包里有 n 个球, 其中 $m, n > 0$. 允许进行下面两种不同操作:

(a) 从每个包里取出相同数目的球; (b) 把一个包里的球的数目翻一番.

问经有限次操作能否使得两个包都取空?

若将操作 (b) 改为“(c) 把一个包里的球的数目变成原来的三倍”, 则经有限次操作能否使得两个包都取空?

题 20.3 (20 分)

在等腰锐角 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$. 记 ω 为 $\triangle ABC$ 的外接圆, D、E 分别为 B、C 向对边所引垂线的垂足. 再设 ω 在 B、C 两点处的切线分别为 l、m. 证明: DE、l、m 三条直线围成的三角形的外接圆过点 A.

题 20.4 (30 分)

求所有整系数多项式 $P(x)$, 使得对任意正整数 n, 均有 $P(n) \mid n! + 2$.

第 21 届田南少年数学人才技术试题

考前说明

考试时间: 2026 年 8 月 16 日 9 : 00 – 10 : 40. 试卷共 4 道试题, 满分 100 分.

题 21.1 (20 分)

对每个正实数 x, 定义 $\boxed{x}$ 是 x 与 $\dfrac{1}{x}$ 中的较大数. 求满足 $5y\boxed{8y}\boxed{25y}=1$ 的所有正实数 y 的值.

题 21.2 (30 分)

已知

$$N = \underbrace{20262026\cdots2026}_{2026\text{个}2026},$$

求 N 除以 7400 的余数.

题 21.3 (20 分)

如图 21.1, 已知边长为 a 的正方形 $ABCD$, 以 D 为圆心, DA 为半径作圆与以 BC 为直径的圆交于 C 及另一点 P. 延长 AP 交 BC 于 N. 求 $\dfrac{BN}{NC}$.

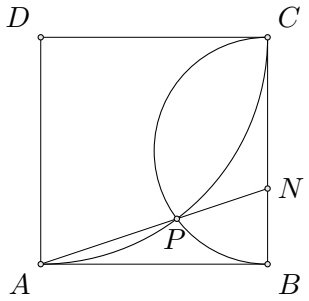


图 21.1

题 21.4 (30 分)

来自 26 个家庭的 26 对兄弟围着圆桌坐下. 证明至少有两人到各自兄弟的“距离”相等.

注: 这里的“距离”是指它们之间 (最少的一侧) 的人数相等.

文　后

编后小记

编排完 21 届试题解析, 再回头读前言, 最想留下的话仍是那句: 留白, 是为了让思维发生.

在编书时像一声警钟, 我反复提醒自己: 如果这本书一翻开就塞满现成答案, 那等于替孩子取消了独立思考的机会. 于是, 每道试题之后, 我们先留出一段空白, 再紧接着给出思路提示与解析过程. 留白, 是为了让孩子先独立迎接挑战; 而将提示与解析紧附题后, 不同于多数书刊把答案统一排在书末的做法, 更能让思考的余温未散, 便及时对照、学习与检查.

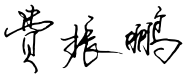
留空不是浪费纸张, 它是邀请. 初学时, 孩子可以在空白处写下第一遍思路; 复习时, 可以换一种颜色补充新方法; 冲刺时, 还可以遮住解析重做, 比较前后思路的变化. 那些涂改、停顿、划掉又重写的痕迹, 比工整的标准答案更真实, 也更重要. 我们鼓励孩子保留自己的思考痕迹, 因为那正是思维生长的证据.

提示只给方向, 不给答案. “先找不变量”“考虑分类讨论”“把文字转成图形”“退到特殊情形看一看”——它像一位温和的老师, 在孩子即将放弃时递上一根拐杖, 但路仍要孩子自己走. 解析则努力展示“怎么想到”, 而不只是“怎么做”: 从审题、条件转化、方法选择, 到步骤书写、检验回顾. 由于评分标准强调数学正确性、格式规范性和解释的清晰度, 解析也像一份无声的范文, 示范如何把推理写清楚、把步骤写完整、把结论写严谨.

至于“解题反思”, 更是编书时最不愿省略的一栏. 孩子可以写下: 我为什么卡住? 关键突破口是什么? 下次遇到同类题先想什么? 时间分配是否合理? 书写是否规范? 这一栏把“做对一道题”变成“收获一类方法”. 奖项可能空缺, 也提醒读者: 不是每道题都要拿满分, 但清晰表达、规范书写、严谨推理, 能让孩子拿到该拿的分.

编余时也有过犹豫: 留空会不会太多? 提示会不会太短? 解析会不会太长? 后来慢慢确定, 这本书不是“答案仓库”, 而是“思维训练场”. 21 届试题, 不是 21 份负担, 而是 21 次与命题人对话的机会. 规则在变, 追求不变; 题目在变, 思考的方法可以迁移.

前言说, 愿每一次留白, 都成为孩子思维生长的空间. 后记则想说: 当书页合上, 空白仍在; 当孩子再次翻开, 用新的颜色写下新的思路, 这篇后记才真正完成. 留白之后, 思维继续生长.



2026 年 10 月 10 日于深圳福田

读者纠错　交流完善

本书中试题虽经反复推敲, 但仍恐有疏漏. 若您在阅读或练习过程中, 发现题目、提示、解析、编排上的错误, 或对某处思路有不同意见, 恳请不吝指正. 您的每一次质疑与提醒, 都是我们修订和完善它的宝贵依据, 谨致以诚挚感谢.

联系方式:

微信: omaths　　邮箱: fzp@omaths.com

来信请注明页码、题号及具体问题, 以便我们及时核查与回复.

符号释义

本书中可能用到下面的符号或缩写, 请对照理解.

符号及其描述

符号	描述	备注
$\mathbb{N}$	自然数集	全体自然数 (含 0) 组成的集合
$\mathbb{Z}$	整数集	全体整数组成的集合
$\mathbb{Q}$	有理数集	全体有理数组成的集合
$\mathbb{R}$	实数集	全体实数组成的集合
$\mathbb{N}^*, \mathbb{N}_+, \mathbb{Z}_+$	正整数集	全体正整数组成的集合
$\varnothing, \emptyset$	空集	不含任何元素的集合
$\in, \ni$	属于, 含有	$5 \in \mathbb{Z}, \mathbb{Q} \ni \dfrac{1}{2}$
$\notin$	不属于	$\sqrt{5} \notin \mathbb{Z}$
$\subseteq, \supseteq$	包含于, 包含	$A \subseteq B, B \supseteq A$
$\not\subseteq, \not\supseteq$	不包含于, 不包含	$A \not\subseteq B, C \not\supseteq D$
$\subsetneqq, \supsetneqq$	真包含于, 真包含	$\mathbb{Z} \subsetneqq \mathbb{Q}, \mathbb{R} \supsetneqq \mathbb{Q}$
$\wedge$	且	$p \wedge q$
$\vee$	或	$a \vee b$
$\neg$	非	$\neg p$
$\cap$	交	$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{且} x \in B\}$
$\cup$	并	$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{或} x \in B\}$
$\complement$	补	$\complement_{\mathbb{R}} \mathbb{Q} = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{且} x \notin \mathbb{Q}\}$
$\setminus$	差	$\mathbb{Z} \setminus \{0\} = \mathbb{Z}^*, \mathbb{N} \setminus \{0\} = \mathbb{N}^*$
$\forall$	任意, 所有	$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geqslant 0$
$\exists$	存在	$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 0$
$:=, \triangleq$	记作	$x^2 - 2x + 3 := t$
$\Longrightarrow$	推出	$a = b \Longrightarrow a^2 = b^2$
$\Longleftrightarrow$	等价于	$a = b \Longleftrightarrow a - b = 0$
$\because, \therefore$	因为, 所以	$\because a = b, \therefore a^2 = b^2$
$\deg$	次数	$\deg f(x) = n, \deg(f) = n$
$y_{\max}$	函数 y 的最大值	$y_{\text{最大值}}$
$y_{\min}$	函数 y 的最小值	$y_{\text{最小值}}$
$\max(a_1, a_2, \cdots, a_k)$	$a_1, a_2, \cdots, a_k$ 中的最大值	$\max\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$
$\min(a_1, a_2, \cdots, a_k)$	$a_1, a_2, \cdots, a_k$ 中的最小值	$\min\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$
$\square$	平行四边形	$\square ABCD$
$\fallingdotseq$	平行且等于	$AB \fallingdotseq CD$
$\overset{\frown}{ACB}$	弧 ACB	$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$
$\odot(ABC)$	$\triangle ABC$ 的外接圆	A, B, C 三点确定的圆
$\overset{m}{=}$	(弧) 的度数等于	$\overset{\frown}{AB} \overset{m}{=} 30^\circ, \overset{\frown}{AB} \overset{m}{=} \overset{\frown}{CD} \not\Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$
$p \mid n$	p 整除 n	p 是 n 的约数
$p^k \parallel n$	p^k 恰好整除 n	$p^k \mid n$ 且 $p^{k+1} \nmid n$

$a \equiv b \pmod{n}$	a, b 对模 n 同余	a, b 除以正整数 n 的余数相同
$\gcd(a,b)$	a, b 的最大公约数	$\gcd(a_1, a_2, \cdots, a_n)$
$\operatorname{lcm}(a,b)$	a, b 的最小公倍数	$\operatorname{lcm}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$
$\operatorname{ord}_m(a)$	a 对模 m 的阶	使 $a^k \equiv 1 \pmod{m}$ 成立的 $k_{\min}$
$\nu_p(n)$	n 的标准分解式中 p 的指数	使 $p^k \mid n$ 且 $p^{k+1} \nmid n$ 成立的 k
$\lfloor x \rfloor, [x]$	x 向下取整	$\lfloor x \rfloor \leqslant x$, 且 $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$
$\lceil x \rceil$	x 向上取整	$\lceil x \rceil \geqslant x$, 且 $\lceil x \rceil \in \mathbb{Z}$
A_n^k	排列数	从 $1 \sim n$ 中取 k 个的有序排列的种数
C_n^k	组合数	从 $1 \sim n$ 中取 k 个的无序组合的种数
$\binom{n}{k}$	二项式系数	$(a+b)^n$ 展开式中, 项 $a^{n-k}b^k$ 的系数
$\sum_{i=1}^{n} x_i$	$\Sigma, x, i,\ i$ 从 1 到 n	从 x_1 加到 x_n 的和
$\prod_{i=1}^{n} x_i$	$\Pi, x, i,\ i$ 从 1 到 n	从 x_1 乘到 x_n 的积

缩写及其含义

缩写	全称	含义
iff	if and only if	当且仅当
s.t.	such that	使得
w.r.t.	with respect to	关于
i.e.	id est	即
a.e.	almost everywhere	几乎处处
a.s.	almost surely	几乎必然
e.g.	exempli gratia	例如
cf.	confer	参见
resp.	respectively	分别
QED	quod erat demonstrandum	证毕
w.l.o.g.	without loss of generality	同 WLOG
WLOG	without loss of generality	不失一般性
LHS	Left-Hand Side	左边
RHS	Right-Hand Side	右边
$\sum_{\mathrm{sym}}$	symmetric sum	对称和
$\sum_{\mathrm{cyc}}$	cyclic sum	循环和

風學數

平增